Průběh funkcí

Vyšetřujte průběh následujících funkcí

1. $f(x) = 3x - x^3$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$
3. $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$
4. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \sin^2 x$
6. $f(x) = \arccos \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{2}+o(x^4)\right)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right) = \underline{\underline{-1/12}}$

---

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x\ln a+\frac{x^2(\ln a)^2}{2}+o(x^2)+1-x\ln a+\frac{x^2(\ln a)^2}{2}+o(x^2)-2}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} (\ln a)^2 + \frac{o(x^2)}{x^2} = (\ln a)^2$

---

8) DÚ

Průběh funkcí:

1) Definiční obor, obor spojitosti
2) Limity v krajních bodech D_f, v bodech nespojitosti atd.
3) Speciální vlastnosti (sudá/lichá, symetrie, periodicita atd.)
4) Významné body: např. $f(0)$ nebo body, kde je $f(x)=0$
5) $f'(x)$: Intervaly monotonie, extrémy, jednostranné derivace tam, kde neexistuje $f'(x)$. Odtud lze pak usoudit obor hodnot, omezenost
6) $f''(x)$: konvexita, konkávnost, inflexní body
7) asymptoty (pokud existují)
8) Graf funkce co nejpřesněji

---

1) $f(x) = 3x - x^3$: $D_f = \mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R}$, spojité derivace všech řádů

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ není omezená, $H_f = \mathbb{R}$

$f(-x) = -3x + x^3 = -f(x)$ ... f je lichá

$f(0) = 0$

$3x - x^3 = 0 \Rightarrow 3 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ jsou body, kde graf protíná osu x

$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1-x^2) = 3(1-x)(1+x) \Rightarrow x = \pm 1$ jsou stacionární body

$x \in (-\infty,-1)$: $f' < 0$ ... klesající $\Rightarrow x=-1$ je lokální minimum

$x \in (-1,1)$: $f' > 0$ ... rostoucí $\Rightarrow x = 1$ je lokální maximum

$x \in (1,\infty)$: $f' < 0$ ... klesající

$f(1) = 2$

$f(-1) = -2$

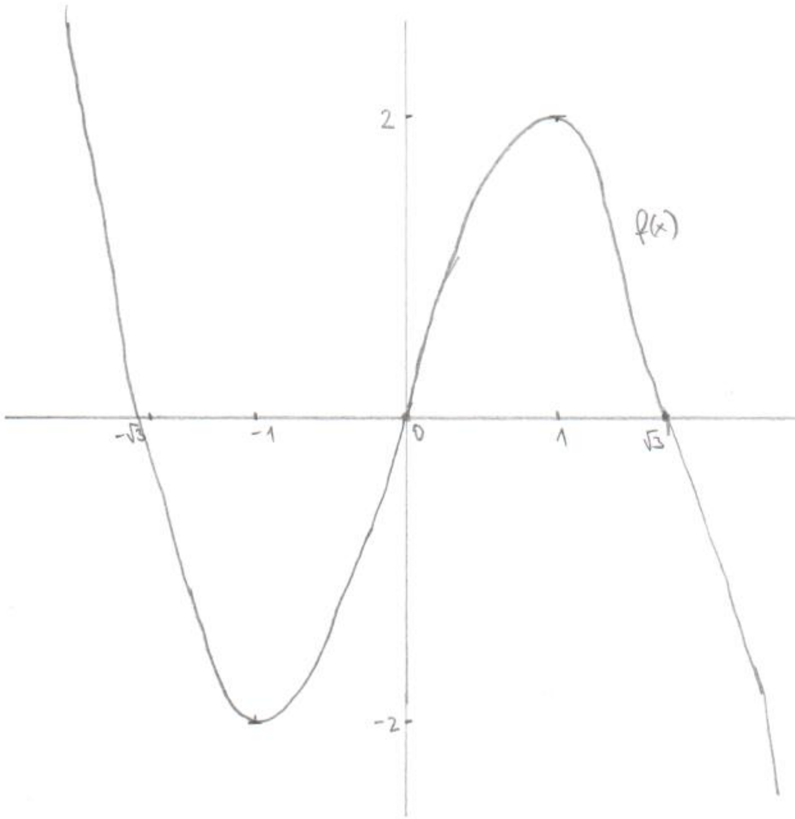
$f''(x) = -6x \Rightarrow x = 0$ je podezřelý jako inflexní

$x \in (-\infty,0)$: $f'' > 0$ ... konvexní $\Rightarrow x=0$ je inflexní bod

$x \in (0,\infty)$: $f'' < 0$ ... konkávní

asymptoty neexistují, $f \sim -x^3$ pro $x \to +\infty$

$f \sim -x^3$ pro $x \to -\infty$



2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-3)}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$. Mimo těchto bodů je f spojitá a má tam spojité derivace.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ ... to jsou zároveň asymptoty v nekonečnech

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 2-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to 3-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to 3+} f(x) = +\infty$

$f(-1) = f(1) = 0$, $f(0) = -1/6$. f očividně není ani lichá ani sudá, není omezená

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)(x-3)-(x-1)(x+1)(2x-5)}{(x-2)^2(x-3)^2} = \frac{2x^3-10x^2+12x-(2x^3-5x^2-2x+5)}{(x-2)^2(x-3)^2} = \frac{-5x^2+14x-5}{(x-2)^2(x-3)^2}$$

$f'=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{24}}{5}$

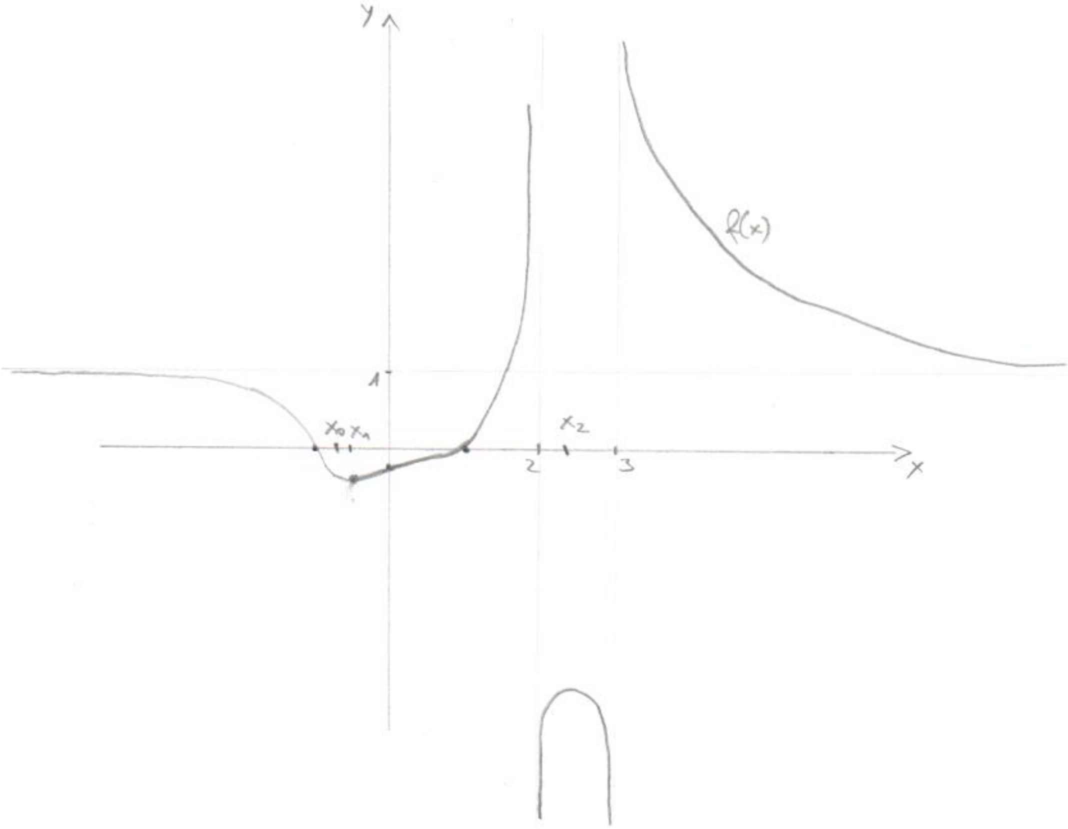
$x_1 \sim -0{,}42$
$x_2 \sim 2{,}38$

$x\in(-\infty,x_1): f'<0 \Rightarrow f$ klesající $\Rightarrow x_1$ je lok. minimum
$x\in(x_1,2): f'>0 \Rightarrow f$ rostoucí
$x\in(2,x_2): f'>0 \Rightarrow f$ rostoucí $\Rightarrow x_2$ je lok. maximum
$x\in(x_2,3): f'<0 \Rightarrow f$ klesající
$x\in(3,+\infty): f'<0 \Rightarrow f$ klesající

$$f''(x) = \frac{-10x+14}{(x-2)^2(x-3)^2} + (-5x^2+14x-5)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(x-2)^3(x-3)^3}\cdot(2x-5) = \frac{(-10x+14)(x-2)(x-3)+(10x^2-28x+10)(2x-5)}{(x-2)^3(x-3)^3}$$

$$= \frac{10x^3-42x^2+30x+34}{(x-2)^3(x-3)^3}$$ .... $f''=0$: jeden reálný kořen $x_0 = \frac{7}{5} - \frac{4\sqrt[3]{3}}{5} - \frac{2\sqrt[3]{9}}{5} \sim -0{,}58$

$x\in(-\infty,x_0): f''<0 \Rightarrow f$ konkávní
$x\in(x_0,2): f''>0 \Rightarrow f$ konvexní $\Big\}$ x_0 je inflexní bod
$x\in(2,3): f''<0 \Rightarrow f$ konkávní
$x\in(3,+\infty): f''>0 \Rightarrow f$ konvexní


y
x
1
2
3
x_0 x_1
x_2
f(x)

3) $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$ Def. obor: $8x^2-x^4 \ge 0$

$x^2(8-x^2)\ge 0 \Rightarrow 8-x^2\ge 0$

$|x|\le\sqrt{8} \Rightarrow \underline{D_f=[-\sqrt{8},\sqrt{8}]}$

Na def. oboru je f spojitá

$f(-\sqrt{8})=f(\sqrt{8})=0$, f je sudá $(f(-x)=f(x))$

$f(0)=0$, body $x=0$, $x=\pm\sqrt{8}$ jsou jediné průsečíky s osou x

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8x^2-x^4}}\cdot(16x-4x^3)=\frac{2x\cdot(4-x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}=\frac{2x(4-x^2)}{|x|\cdot\sqrt{8-x^2}}$$

Není definovaná v $x=0$ a $x=\pm\sqrt{8}$

Limity $f'(x)$: $\lim\limits_{x\to-\sqrt{8}_+} f'(x)=+\infty$, protože $\frac{x}{|x|}<0$ a $4-x^2<0$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{8}_-} f'(x)=-\infty$, protože $\frac{x}{|x|}>0$, $4-x^2<0$

$\lim\limits_{x\to 0_-} f'(x)=-\frac{8}{\sqrt{8}}=-\sqrt{8}$, $\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x)=\sqrt{8}$

$f'(x)=0$: $4-x^2=0$, $\underline{x=\pm 2}$

	$(-\sqrt{8},-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\sqrt{8})$
$f'(x)$	+	−	+	−
f	↗	↘	↗	↘

Body ± 2 jsou lok. maxima

Bod 0 je lok. minimum

$f(\pm 2)=\sqrt{32-16}=4$. Odtud obor hodnot $H_f=[0,4]$

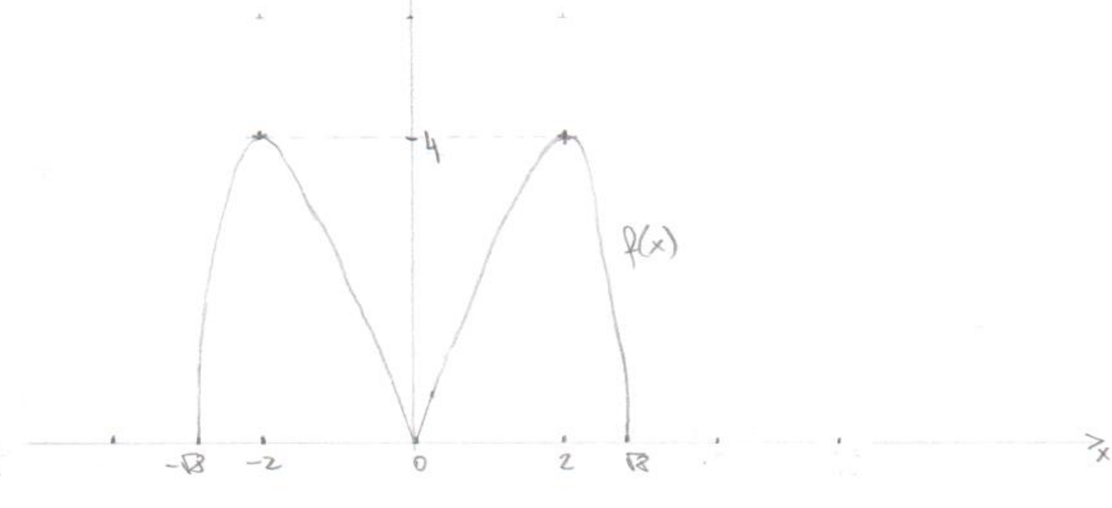
$$f''(x)=\frac{(8-6x^2)\cdot\sqrt{8x^2-x^4}-(8x-2x^3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8x^2-x^4}}\cdot(16x-4x^3)}{(8x^2-x^4)}=\frac{(8-6x^2)(8x^2-x^4)-x^2\cdot(8-2x^2)^2}{\sqrt{8x^2-x^4}\cdot(8x^2-x^4)}=$$

$$=\frac{2x^2\cdot(32-\overset{28}{\cancel{16}}x^2+3x^4)-4x^2\cdot(16-8x^2+x^4)}{(8x^2-x^4)^{3/2}}=\frac{-24x^2+2x^4}{\sqrt{8x^2-x^4}\cdot(8-x^2)}=\frac{2x^2(-12+x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}\cdot(8-x^2)}=\frac{2x^2(x^2-12)}{\sqrt{8x^2-x^4}\cdot(8-x^2)}$$

f'' není definovaná ve stejných bodech jako f'. Možné inflexní body: $x=\pm\sqrt{12}\notin D_f$

$f''<0$ všude, kde je definovaná $\Rightarrow$ f je konkávní na $(-\sqrt{8},0)$ a $(0,\sqrt{8})$.

Asymptoty nejsou.



4) $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ D_f: $\cos 2x \neq 0$

$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

f je spojitá na D_f. Čitatel 2π-periodický, jmenovatel π-per.
Dohromady f je 2π-periodická
Čitatel i jmenovatel sudé fce $\Rightarrow$ f je sudá.
Uvnitř periody 4 body, kde f není definovaná: $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}-} f(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}+} f(x) = -\infty \\
\lim\limits_{x \to \frac{3}{4}\pi-} f(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x \to \frac{3}{4}\pi+} f(x) = -\infty \\
\lim\limits_{x \to \frac{5}{4}\pi-} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x \to \frac{5}{4}\pi+} f(x) = +\infty \\
\lim\limits_{x \to \frac{7}{4}\pi-} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x \to \frac{7}{4}\pi+} f(x) = +\infty
\end{array}\right\} \Rightarrow H_f = \mathbb{R}$$

$f(0) = 1$, $f(x) = 0$: $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, uvnitř $(0, 2\pi)$: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x \cdot 2}{(\cos 2x)^2} = \frac{2\cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x}{(\cos 2x)^2} = \frac{4\cos^2 x \sin x - \sin x \cos^2 x + \sin^3 x}{(\cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x (2\cos^2 x + 1)}{(\cos 2x)^2}$$

$f' = 0$: $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi$ na periodě 2π

$f' > 0$: f rostoucí na $(0, \frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

$f' < 0$: f klesající na $(\pi, \frac{5}{4}\pi), (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}), (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$

$$f''(x) = \frac{\left(\cos x (2\cos^2 x + 1) + \sin x (-4\cos x \sin x)\right)(\cos 2x)^2 - \sin x (2\cos^2 x + 1) \cdot 2\cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2}{(\cos 2x)^4}$$

$$= \frac{(2\cos^3 x + \cos x - 4\cos x \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) + 8\sin^2 x \cos x (2\cos^2 x + 1)}{(\cos 2x)^3} =$$

$$= \frac{\cos x}{(\cos 2x)^3} \cdot \left[(2\cos^2 x + 1 - 4\sin^2 x)(\cos 2x) + 4 \cdot (4\sin^2 x \cos^2 x) + 8\sin^2 x\right] =$$

$$= \frac{\cos x}{(\cos 2x)^3} \cdot \left[(3\cos^2 x - 3\sin^2 x)(\cos 2x) + 4(\sin 2x)^2 + 8\sin^2 x\right] =$$

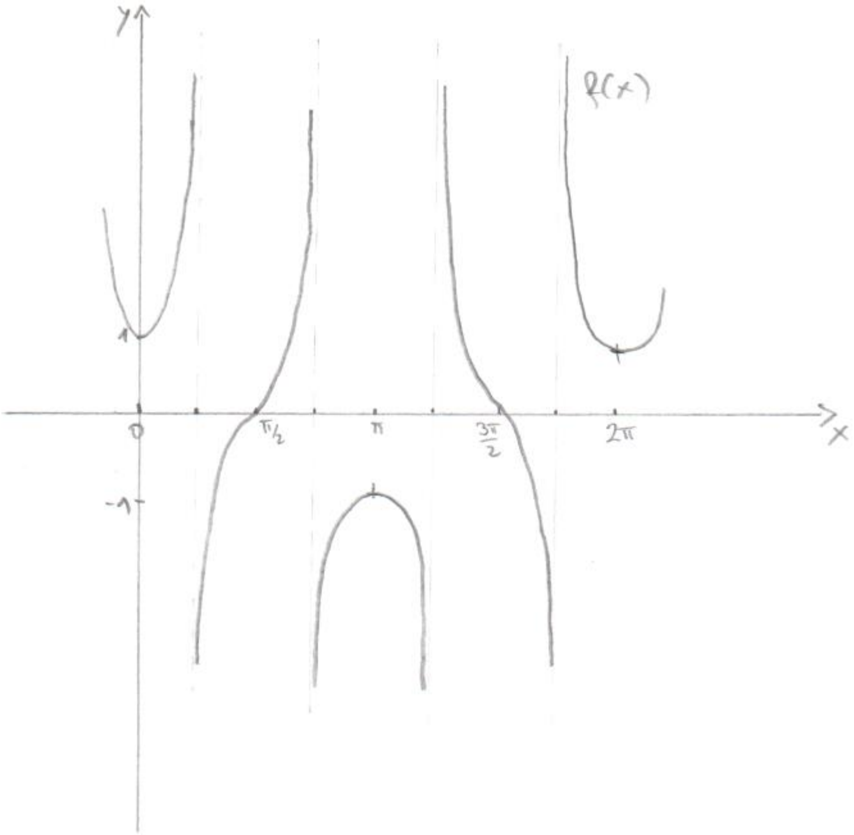
$$= \frac{\cos x}{(\cos 2x)^3} \cdot \left[3(\cos 2x)^2 + 4(\sin 2x)^2 + 8\sin^2 x\right] = \frac{\cos x}{(\cos 2x)^3} \cdot \underbrace{\left[3 + \sin^2 2x + 8\sin^2 x\right]}_{>0!}$$

Inflexní body: $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

$f'' > 0$ a f konvexní: $(0, \frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}), (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}), (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$

$f'' < 0$ a f konkávní: $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}), (\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4})$

Asymptoty nejsou. $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$ ... lokální extrémy, $x = 0$ ... lok. min
$x = \pi$ ... lok. max



5) $f(x) = e^{-2x} \sin^2 x$ $\quad D_f = \mathbb{R}$, f spojitá všude.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ neexistuje $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $H_f = [0, +\infty)$

Není periodická, sudá ani lichá, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(0) = 0$

$f(x) = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) \cdot \sin^2 x + e^{-2x} \cdot 2 \sin x \cos x = 2e^{-2x} \sin x (\cos x - \sin x)$

Stacionární body: $\sin x = 0$ a $\cos x = \sin x \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$f' > 0$ a f rostoucí: $(0, \pi/4)$, $(\pi, \frac{5\pi}{4})$, ...

$f' < 0$ a f klesající: $(\pi/4, \pi)$, $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$, ... $\Rightarrow$ Body $k\pi$ jsou lokální minima

Body $\pi/4 + k\pi$ jsou lokální maxima

$f''(x) = -4e^{-2x} \sin x (\cos x - \sin x) + 2e^{-2x} \cos x (\cos x - \sin x) + 2e^{-2x} \sin x (-\sin x - \cos x)$

$= 2e^{-2x} \left[-2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x + \cos^2 x - \cos x \sin x - \sin^2 x - \cos x \sin x \right]$

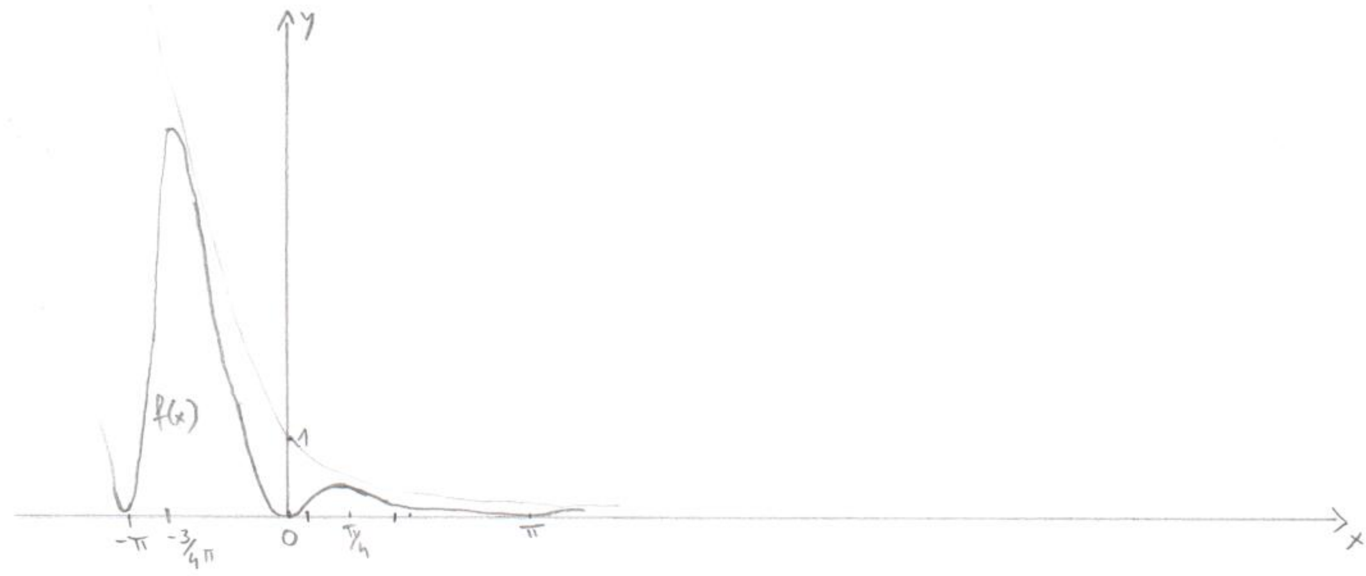
$= 2e^{-2x} \left[-4 \sin x \cos x + 1 \right] = 2e^{-2x} \cdot (1 - 2 \sin 2x)$

Inflexní body: $\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pi/6 + 2k\pi \Rightarrow x = \pi/12 + k\pi$

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

$x \in (\pi/12, \frac{5\pi}{12}) \Rightarrow f'' < 0$ a f konkávní

$x \in (\frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}) \Rightarrow f'' > 0$ a f konvexní $\quad$ atd...



6) $f(x) = \arccos \frac{2x}{x^2+1}$

D_f: Potřebujeme $\frac{2x}{x^2+1} \le 1$ a $\frac{2x}{x^2+1} \ge -1$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$2x \le x^2+1$ $\quad$ $2x \ge -x^2-1$

$D_f = \mathbb{R} \Leftarrow$ $\quad 0 \le x^2-2x+1$ $\quad x^2+2x+1 \ge 0$

f je spojitá $\quad 0 \le (x-1)^2$ $\quad (x+1)^2 \ge 0$

OK $\quad$ OK

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \arccos 0 = \pi/2$$

$f(0) = \pi/2$ $\qquad f(x)=0$: $\frac{2x}{x^2+1} = 1 \Rightarrow x = 1$, $f(1) = 0$

podobně $f(-1) = \arccos(-1) = \pi$

$H_f = [0, \pi]$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^4+2x^2+1-4x^2}} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)\cdot\sqrt{(x^2-1)^2}} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)|x^2-1|}$$

$= \frac{2}{x^2+1} \cdot \mathrm{sgn}(x^2-1)$. Problémové body $x = \pm 1$, tam $f'(x)$ neexistuje

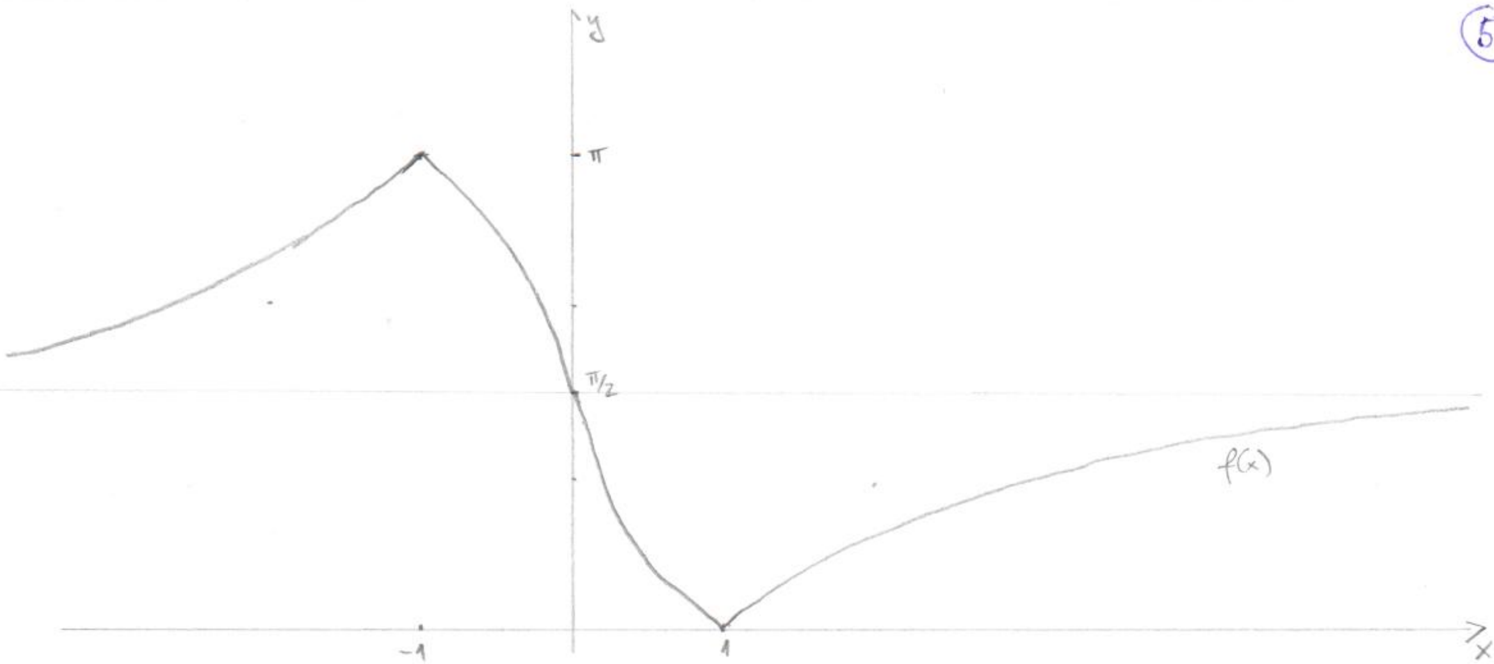
$\lim_{x\to-1_-} f'(x) = 1$ $\quad \lim_{x\to-1_+} f'(x) = -1$ $\quad \lim_{x\to1_-} f'(x) = -1$, $\lim_{x\to1_+} f'(x) = 1$

$f' > 0$ a f rostoucí pro $x \in (-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$
$f' < 0$ a f klesající pro $x \in (-1, 1)$
$\Rightarrow$ v $x = -1$ je lok. max, v $x = 1$ je lok. min

$$f''(x) = 2\,\mathrm{sgn}(x^2-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} \cdot \mathrm{sgn}(x^2-1)$$

$f'' > 0$ a f konvexní pro $x \in (-\infty, -1)$ a $(0, 1)$ $\qquad x = 0$ je inflexní bod
$f'' < 0$ a f konkávní pro $x \in (-1, 0)$ a $(1, +\infty)$

Pro kreslení grafu $f'(0) = -2$


y
π
π/2
-1
1
x
f(x)