Limita posloupnosti

Vypočítejte

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2}+\sqrt[5]{n^7+n^3+1}}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$, $n \geq 1$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})$, $n\geq 1$
7. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$.

   Najděte $\limsup\limits_{n\to\infty}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty}$
8. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2}{3}n\pi$
9. $a_n = n(2+(-1)^n)$
10. $a_n = \cos^n \dfrac{2}{3}n\pi$

    Najděte hromadné body následujících posloupností
11. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \ldots$
12. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \ldots$

Limity posloupností

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost. Definice podobně jako pro funkce: $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon$

<u>Heineho věta</u>: Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $P_\delta(x_0)\cap D_f \neq \emptyset$ pro $\delta > 0$. Potom

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}$, která splňuje $x_n \to x_0$.

Nejčastější použití v praxi: Úkol je spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. My spočítáme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ (např. l'Hospitalem) a potom díky Heinemu: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

Podposloupnost: $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{n_k\}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Potom $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je podposloupnost. $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$

<u>Weierstrassova věta</u>: Z každé <u>omezené</u> posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost

Je-li $\{a_n\}$ neomezená shora (zdola), lze vybrat podposloupnost divergující do $+\infty$ $(-\infty)$.

<u>Hromadný bod</u>: $A \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, má-li $\{a_n\}$ podposloupnost $\{a_{n_k}\}$ taž, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_k \{a_k,\ k \geq n\}$ existuje vždy, protože $\sup\{a_k,\ k\geq n\}$ je nerostoucí posloupnost

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_k \{a_k,\ k \geq n\}$ totéž (neklesající)

- $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadné body a každý další hromadný bod A splňuje $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.
- $\lim a_n$ existuje $\iff \liminf a_n = \limsup a_n$

---

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+1} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2} + \sqrt[5]{n^7+n^3+1}}$ = (podobně jako pro funkce [viz Heineho věta])

$= \lim\limits_{n\to\infty}^{*} \dfrac{n^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}} + n^{4/3-3/2}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}\right)}{n^{3/2}\cdot\left(\sqrt[4]{1-\frac{6}{n}+\frac{2}{n^6}} + n^{7/5-3/2}\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^7}}\right)} = \underline{\underline{1}}$ protože $4/3-3/2=-1/6<0$ a $7/5-3/2=-1/10<0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ Rozšířená škála: $n^n >> n! >> a^n >> n^\alpha$.

Ukážeme to pro $a>0$ (jinak by to šlo podobně přes $\lim \left|\frac{a^n}{n!}\right|$).

$\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n} = a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n}$. Nechť $M\in\mathbb{N}$ tak, že $\frac{a}{M}<1$. Tedy např. $M=\left[\frac{1}{a}\right]+1$

Pak pro $n>M$: $\dfrac{a^n}{n!} = a\cdot\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{M-1}\cdot\frac{a}{M}\cdot\frac{a}{M+1}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n} \leq a\cdot\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{M-1}\cdot\frac{a}{M}\cdot\frac{a}{M}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{M}$

$= \left(\frac{a}{M}\right)^{n-M}\cdot\frac{a^M}{M!} = \left(\frac{a}{M}\right)^n\cdot\frac{M^M}{M!}$

Proto $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{M}\right)^n\cdot\frac{M^M}{M!} = \frac{M^M}{M!}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{M}\right)^n = \frac{M^M}{M!}\cdot 0 = \underline{0}$ (protože $\frac{a}{M}<1$)

a protože $\dfrac{a^n}{n!}\geq 0$, platí: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}\geq 0$ a tedy $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ = dle Heineho = $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim \exp\dfrac{\ln x}{x} = \exp\lim\dfrac{\ln x}{x}$ = l'Hospital = $\exp\lim\dfrac{\frac{1}{x}}{1} =$

$= \exp 0 = \underline{\underline{1}}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-1}{1\cdot2}+\dfrac{3-2}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 1-\dfrac{1}{n+1} = 1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = \underline{\underline{1}}$

5) $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ Nejprve: $\{a_n\}$ je omezená: - zdola nulou triviálně

- shora: $a_n<2$. Důkaz MI

i) $a_1=\sqrt{2}<2$ triv.

ii) Nechť $a_k<2$. Pak $a_{k+1}=\sqrt{a_k+2}<\sqrt{2+2}=2$ dle indukčního předpokladu

Dále: $\{a_n\}$ je rostoucí: $a_{n+1}>a_n$: Musíme ukázat $\sqrt{a_n+2}>a_n \iff a_n+2>a_n^2$

$\iff a_n^2-a_n-2<0$

$\iff (a_n+1)(a_n-2)<0$

$\iff a_n\in(-1,2)$.

To už víme.

$\{a_n\}$ je rostoucí a omezená $\Rightarrow$ má limitu. $\lim a_n = A = \lim a_{n+1}$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{a_n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & & \sqrt{A+2} \end{array}\right\} \Rightarrow A=\sqrt{A+2} \Rightarrow A=-1 \text{ nebo } A=2.$$

-1 je nesmysl, proto $\underline{\underline{A=2}}$

6) $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$

a_n je omezená zdola, pro $n \geq 2$ platí $a_n > 1$: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \overset{A-G}{>} \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1$

a_n je nerostoucí pro $n \geq 2$: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) < \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$

protože $\frac{1}{a_n} < 1 < a_n$

Nerostoucí + omezená zdola => má limitu. $\lim a_n = A = \lim a_{n+1}$

$$\left.\begin{matrix} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ A \qquad \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right) \end{matrix}\right\} \quad A = \frac{A}{2} + \frac{1}{2A} \iff A = \frac{1}{A} \iff A = \pm 1.$$

-1 je nesmysl $\Rightarrow \underline{\underline{A = 1}}$

---

7) Pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{n \to +\infty} \sin(nx)$?

Očividně $x = 0$ a snadno také $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vytvoří také posloupnost nul, tedy má limitu.

Ukážeme sporem, že nic dalšího už není. Nechť $x \neq k\pi$ a nechť ex. $\lim_{n \to \infty} \sin(nx) = L$.

Zvol $m \in \mathbb{N}$ libovolně: $\sin((n+m)x) = \sin(nx)\cos(mx) + \cos(nx)\sin(mx)$

$$\Rightarrow \left(\sin((n+m)x) - \sin(nx)\cos(mx)\right)^2 = \cos^2(nx)\sin^2(mx) = \left(1 - \sin^2(nx)\right)\left(1 - \cos^2(mx)\right)$$

$n \to \infty$: $$\left(L - L\cdot\cos(mx)\right)^2 = \left(1 - L^2\right)\left(1 - \cos^2(mx)\right) = 1 - L^2 - \cos^2(mx) + L^2\cos^2(mx)$$

$$L^2\left(1 - \cos(mx)\right)^2 = \left(1 - L^2\right)\left(1 - \cos(mx)\right)\left(1 + \cos(mx)\right)$$

Nechť $\cos(mx) \neq 1$: $$L^2 - L^2\cos(mx) = 1 - L^2 + \cos(mx) - L^2\cos(mx)$$

$$\cos(mx) = 2L^2 - 1$$

Toto lze udělat pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ a dostáváme tak, že $\forall m \in \mathbb{N}$: $\cos(mx) = 1$ nebo $\cos(mx) = 2L^2 - 1$

Už nás nezajímají body $x = k\pi$, které toto splňují.

Máme $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$:

a) $\cos x = \cos 2x = 1$: nic nového

b) $\cos x = 1$, $\cos 2x = 2L^2 - 1$: $2L^2 - 1 = 2\cdot 1 - 1 = 1 \Rightarrow L^2 = 1$ a $\cos(mx) = 1$

c) $\cos x = 2L^2 - 1$, $\cos 2x = 1$: vede opět na $L^2 = 1$ $\longrightarrow$ nic nového

d) $\cos x = \cos 2x = 2L^2 - 1$: $(2L^2 - 1) = 2\cdot(2L^2 - 1)^2 - 1$

vede na $L^2 = 1/4$, $\cos x = -1/2$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}\pi \cdot k$, kde $k \neq 3L$ pro $L \in \mathbb{N}$.

Pro $x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ a $3 \nmid k$: $\cos(mx)$ nabývá hodnot $\{-\frac{1}{2}, 1\}$ a platí tak $\cos(mx) = 1$ nebo $2L^2 - 1$.

Ovšem $\sin(nx)$ pro $x = k \cdot 2/3\pi$, $3 \nmid k$ nabývá hodnot $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$ které se střídají a $\sin(nx)$ nemá limitu. Jediné x tak zůstává $\underline{\underline{x = k\pi}}$ $k \in \mathbb{Z}$

8) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cos\frac{2}{3}n\pi$ Víme: $\cos\frac{2}{3}n\pi \in \{-1/2, 1\}$

$$\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \longrightarrow 1 \text{ pro } n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = 1 \quad , \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1/2$$

---

9) $a_n = n(2+(-1)^n)$: $n=2k$: $a_{2k} = 6k \longrightarrow +\infty$

$n = 2k+1$: $a_{2k+1} = 2k+1 \longrightarrow +\infty$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

---

10) $a_n = \cos^n\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$ $a_{3k} = 1$ pro lib. $k \in \mathbb{N}$

pro $n = 3k+1$ nebo $3k+2$: $a_n = (-1/2)^n = \pm\frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$

bez ohledu na znaménko

$$\Rightarrow \limsup a_n = 1 \qquad \liminf a_n = 0$$

---

11) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$

Jde o 2 posloupnosti smíchané do sebe: jedna je $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ s limitou 0

druhá je $\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$ s limitou 1.

$H = \{0,1\}$ ... H je množina hromadných bodů.

---

12) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$

Jde o posloupnost obsahující všechna racionální čísla z intervalu $(0,1)$.

Očividně jsou 0 a 1 hromadné body (posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ a $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$).

Každé racionální číslo ve tvaru p/q $(p<q)$ je hromadný bod: posloupnost $\left\{\frac{np}{nq}\right\}$

Ke každému iracionálnímu číslu z intervalu $(0,1)$ najdeme posloupnost racionálních čísel $\{r_n\}$ tvořenou "useknutým desetinným rozvojem" na n-tém místě