Sada příkladů 2/13

Funkce více proměnných

Vázané extrémy

Nalezněte extrémy dané funkce vzhledem k vazbě

1. $xy; \quad x + y = 1$
2. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}; \quad x^2 + y^2 = 1$
3. $x^2 + y^2; \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
4. $x^m y^n z^p; \quad x + y + z = a, \qquad m,\, n,\, p,\, a > 0$
5. $\sin x \sin y \sin z; \quad x + y + z = \dfrac{\pi}{2}, \qquad x,\, y,\, z > 0$
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^p; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = a, \qquad p > 1,\, a \geq 0.$

   Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce na uvedené množině

7. $x - 2y - 3; \quad 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1,\, 0 \leq x + y \leq 1$
8. $x^2 - xy + y^2; \quad |x| + |y| \leq 1$
9. $x^2 + y^2 - 12x + 16y; \quad x^2 + y^2 \leq 25$
10. $x + y + z; \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$
11. Při jakých rozměrech má kvádr daného objemu nejmenší povrch?
12. Do daného kužele vepište hranol o n-úhelníkové podstavě, který má maximální objem.
13. Najděte vzdálenost bodu (p, q, r) od roviny $ax + by + cz + d = 0$.
14. Najděte vzdálenost d dvou mimoběžek

$$\begin{array}{ll} x = X_1 + at & x = X_2 + pt \\ y = Y_1 + bt & y = Y_2 + qt \\ z = Z_1 + ct & z = Z_2 + rt\,. \end{array}$$

15. Pomocí hledání vázaných extrémů dokažte
a) AG nerovnost $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $a_i \geq 0$
b) Hölderovu nerovnost $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$, $x_i,\, y_i \geq 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

16. V počátku kartézských souřadnic je umístěn bodový náboj Q.
a) Jaké bodové náboje Q_A, Q_B, Q_C musíme umístit do bodů $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$ $C = (0,0,4)$, aby náboj q v bodě $(1,1,1)$ byl v rovnováze.
b) Bude tato rovnováha stabilní?

Věta o regulárním zobrazení

17. Vyřešte rovnici $(z_y)^2 z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + (z_x)^2 z_{yy} = 0$ tím, že položíte $x = u$, $y = v$, $z = w$ a přepíšete ji na rovnici pro funkci u proměnných v a w.

18. Vyjádřete první složku f_x vektoru $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ ve sférických souřadnicích $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$.

Přepište do nových proměnných

19. $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$, $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$

20. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

21. $x^2 z_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

VÁZANÉ EXTRÉMY

Hledáme extrémy funkce $f:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ za podmínky, že platí $g(x)=0$, kde $g:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů: Body podezřelé z extrémů jsou: $a \in \mathbb{R}^N$ t.ž. $\nabla g(a)=0$ a pokud $\nabla g(a) \neq 0$, pak takové body, které splňují $g(a)=0$ a $\nabla(f-\lambda g)(a)=0$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$.

[pro více vazeb analogicky s $f-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i$], podmínka $\nabla g(a) \neq 0$ je nahrazena maximální hodností matice $\begin{pmatrix}\nabla g_1 \\ \vdots \\ \nabla g_m\end{pmatrix}(a)$]

---

1) $f(x,y)=xy \qquad g(x,y)=x+y-1$

Máme $\nabla g=(1,1) \neq 0$ všude

Označme $L(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=xy-\lambda(x+y-1)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y-\lambda &&= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x-\lambda &&= 0 \\ g(x,y) &= x+y-1 &&= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y=\lambda \\ &x=\lambda \\ &\lambda+\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=\tfrac{1}{2} \Rightarrow a=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ je podezřelý bod.} \end{aligned}$$

$f(a)=\frac{1}{4}$, $f(0,1)=f(1,0)=0 \Rightarrow$ v bodě a je lokální maximum

---

2) $f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b} \qquad g(x,y)=x^2+y^2-1$. Očividně $a,b \neq 0$.

Máme $\nabla g=(2x,2y)$, $\nabla g=0$ jen pro $x=y=0$, to však nesplňuje podmínku $g(x,y)=0$.

$L(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\lambda(x^2+y^2-1)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{1}{a}-2\lambda x &&= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{b}-2\lambda y &&= 0 \\ g(x,y) &= x^2+y^2-1 &&= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x=\frac{1}{2a\lambda} \\ &y=\frac{1}{2b\lambda} \\ &\frac{1}{4a^2\lambda^2}+\frac{1}{4b^2\lambda^2}-1=0 \Rightarrow \lambda^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right) \Rightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2|a|\cdot|b|} \end{aligned}$$

Máme dva body: $A=\left(\frac{|a||b|}{a\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{|a|\cdot|b|}{b\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ a $\left(-\frac{|a||b|}{a\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{|a||b|}{b\sqrt{a^2+b^2}}\right)=B$

$f(A)=\frac{|a||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)>0$ a $f(B)=\frac{-|a||b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)<0$. Očividně v A je lok. maximum a v B je lok. minimum

---

3) $f(x,y)=x^2+y^2 \qquad g(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1$. Očividně $a,b \neq 0$.

$\nabla g=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) \neq 0$.

$L(x,y)=x^2+y^2-\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - \frac{\lambda}{a} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - \frac{\lambda}{b} = 0 \\ g(x,y) &= \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0\end{aligned}\Bigg\} \quad \begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{2a} \\ y &= \frac{\lambda}{2b} \\ \frac{\lambda}{2a^2} + \frac{\lambda}{2b^2} &= 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow A = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)\end{aligned}$$

$$f(A) = \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\cdot(b^2+a^2) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \qquad f(0,b) = b^2 > f(A) \Rightarrow \text{V } A \text{ je lokální minimum}$$

---

4) $f(x,y,z) = x^m y^n z^p \qquad g(x,y,z) = x+y+z-a \qquad m,n,p,a > 0.$

$\nabla g = (1,1,1) \neq 0$

$L(x,y,z) = x^m y^n z^p - \lambda(x+y+z-a)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= m x^{m-1} y^n z^p - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= n x^m y^{n-1} z^p - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= p x^m y^n z^{p-1} - \lambda = 0 \\ g(x,y,z) &= x+y+z-a = 0\end{aligned}$$

Nechť $x,y,z \neq 0$:
$m x^m y^n z^p = \lambda x \Rightarrow x = \frac{m}{\lambda}\cdot x^m y^n z^p$
$n x^m y^n z^p = \lambda y \Rightarrow y = \frac{n}{\lambda} x^m y^n z^p$
$p x^m y^n z^p = \lambda z \Rightarrow z = \frac{p}{\lambda} x^m y^n z^p$

$\Rightarrow \frac{m+n+p}{\lambda}\cdot x^m y^n z^p = a$

$\lambda = \frac{m+n+p}{a} x^m y^n z^p$

$\Rightarrow m x^{m-1} y^n z^p = \frac{m+n+p}{a} x^m y^n z^p \Rightarrow x = \frac{am}{m+n+p}$. Analogicky $y = \frac{an}{m+n+p}$, $z = \frac{ap}{m+n+p}$

Body $x=0$, $(y=0, z=0)$ jsou na hranici definičního oboru $f \Rightarrow$ nemá smysl tam hledat lokální extrémy. Jediný podezřelý bod je $A = \left(\frac{am}{m+n+p}, \frac{an}{m+n+p}, \frac{ap}{m+n+p}\right)$ a protože $f(A) > 0$, zatímco poblíž hranice je f blízko nuly, je nutně v bodě A lokální maximum.

---

5) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z \qquad g(x,y,z) = x+y+z-\pi/2$, $x,y,z > 0$, tj. $x,y,z \in (0, \pi/2)$

$\nabla g = (1,1,1) \neq 0$

$L(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z - \lambda(x+y+z-\pi/2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= \cos x \sin y \sin z - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \sin x \cos y \sin z - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= \sin x \sin y \cos z - \lambda = 0 \\ g &= x+y+z-\pi/2 = 0\end{aligned}$$

$\cos x \sin y \sin z = \sin x \cos y \sin z$. Protože $\sin z \neq 0$, máme $\sin(x-y) = 0 \Rightarrow x=y$. Podobně získáme $x=y=z$. A z vazební podmínky $x=y=z=\pi/6$. $A = (\pi/6, \pi/6, \pi/6)$

$f(A) = \frac{1}{8}$. Pro $x \to 0$ je $f(x,y,z) \to 0$ a úvahou tak dostáváme, že v bodě A je lokální maximum.

6) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^p \qquad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - a \qquad p > 1,\ a \geq 0$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$\nabla g = (1, 1, \dots, 1) \neq 0$

$L(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^p - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right)$

$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= p x_j^{p-1} - \lambda = 0 \\ g &= \sum_1^n x_i - a = 0 \end{aligned}\right\}$ $\forall j = 1, \dots, n: \ x_j = \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow n \cdot \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = a$

$\underline{\lambda = p \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^{p-1}} \Rightarrow x_j = \frac{a}{n}$

$A = \left(\frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) \qquad f(A) = \frac{a^p}{n^{p-1}}$. Protože v bodě $(a, 0, \dots, 0)$ je $f(x) = a^p > f(A)$

soudíme, že v bodě A je lokální minimum

---

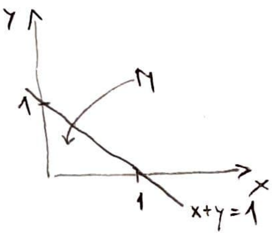
7) $f(x,y) = x - 2y - 3 \qquad M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x+y \leq 1\}$

M je kompaktní množina (omezená a uzavřená), f je spojitá $\Rightarrow$ nabývá maxima a minima

1. krok: extrémy uvnitř M: $\nabla f = (1, -2) \neq 0 \Rightarrow$ uvnitř M nejsou stacionární body.

$\Rightarrow$ extrémy se nabývají na hranici

2. krok: vázané extrémy na ∂M:



a) $y = 0,\ x \in [0,1]$: $\tilde{f}(x) = f(x,0) = x - 3$

nejnižší hodnota zde je $\tilde{f}(0) = -3$

nejvyšší hodnota zde je $\tilde{f}(1) = -2$

b) $x = 0,\ y \in [0,1]$: $\bar{f}(y) = f(0,y) = -2y - 3$

nejnižší hodnota zde je $\bar{f}(1) = -5$

nejvyšší hodnota zde je $\bar{f}(0) = -3$

c) $g(x,y) = x + y - 1$

$\nabla g = (1,1) \neq 0$

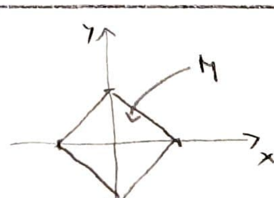
$L(x,y) = x - 2y - 3 - \lambda(x+y-1) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2 - \lambda = 0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$ spor. Nejsou žádné stac. body

$\Rightarrow$ extrémy se nabývají v rozích. Nejvyšší hodnota je -2 v bodě $(1,0)$

Nejnižší hodnota je -5 v bodě $(0,1)$

---

8) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 \qquad M = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$



M je kompakt

f je spojitá

$\Rightarrow$ existují glob. extrémy na M

1.: extrémy uvnitř: $\nabla f = (2x - y, -x + 2y)$

$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0$ a $y = 0$

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ je poz. def. $\Rightarrow$ V počátku je lokální minimum, $f(0,0) = 0$

2. vázané extrémy na ∂M: a) $x + y = 1;\ x \geq 0, y \geq 0$: $g(x,y) = x + y - 1$, $\nabla g = (1,1) \neq 0$

$L(x,y) = x^2 - xy + y^2 - \lambda(x+y-1) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - y - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -x + 2y - \lambda = 0 \\ g &= x + y - 1 = 0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} y &= 2x - \lambda \\ x &= \lambda \\ \lambda &= 1/2 \end{aligned}$ $\Rightarrow A = (1/2, 1/2)$

$f(A) = \frac{1}{4}$, $f(0,1) = 1 \Rightarrow$ V bodě A je lok. min. vzhledem k vazbě. Ale $f(A) \geq f(0,0)$, tak nás nezajímá.

b) $-x+y=1,\ x\le 0,\ y\ge 0$: $g(x,y)=-x+y-1$, $\nabla g=(-1,1)\neq 0$

$$L(x,y)=x^2-xy+y^2-\lambda(-x+y-1) \Rightarrow \left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=2x-y+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=-x+2y-\lambda=0\\ g&=-x+y-1=0\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}y&=2x+\lambda\\ \lambda&=-3x\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=-x \Rightarrow x=-1/2,\ y=1/2 \quad B=(-1/2,1/2)$$

$f(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $f(0,1)=1 \Rightarrow$ B je lok. minimum vzhledem k vazbě, ale $f(B)>f(0,0)$.

c) $-x-y=1,\ x\le 0,\ y\le 0$ analogicky jako a) $C=(-1/2,-1/2)$, $f(C)=1/4$ je opět lok. min.

d) $x-y=1,\ x\ge 0,\ y\le 0$ analogicky jako b) $D=(1/2,-1/2)$, $f(D)=3/4$ je opět lok. min.

Nejvyšší hodnoty se tedy nabývají v rozích čtverce, $f(0,\pm 1)=f(\pm 1,0)=1$.
Globální minimum je v počátku, kde $f(0,0)=0$.

---

9) $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ $\qquad M=\{(x,y): x^2+y^2\le 25\}$ (Spojitá f na kompaktu)

1. lokální extrémy uvnitř: $\nabla f=(2x-12,2y+16) \Rightarrow x=6,\ y=-8$. Bod $(6,-8)\notin M$!
Uvnitř M tak nejsou lokální extrémy

2. vázané extrémy na hranici : $g(x,y)=x^2+y^2-25$. $\nabla g=(2x,2y)\neq 0$ na $\{g=0\}$

$$L(x,y)=x^2+y^2-12x+16y-\lambda(x^2+y^2-25): \quad \left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=2x-12-2\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=2y+16-2\lambda y=0\\ g&=x^2+y^2-25=0\end{aligned}\right\}$$

Očividně $\lambda\neq 1$ a pak $x=\frac{6}{1-\lambda}$ $\quad y=-\frac{8}{1-\lambda}$

$\Rightarrow \frac{100}{(1-\lambda)^2}=25$

$(1-\lambda)^2=4$ ⟨ $\lambda=3$, $\lambda=-1$

Dostáváme podezřelé body $A=(-3,4)$ a $B=(3,-4)$.

$f(A)=125$ a $f(B)=-75$ $\Rightarrow$ V bodě B je nejnižší hodnota f na M
v bodě A je nejvyšší hodnota f na M.

---

10) $f(x,y,z)=x+y+z$ $\qquad M=\{(x,y,z): x^2+y^2\le z\le 1\}$ (spojitá na kompaktu)

1. lokální extrémy uvnitř : $\nabla f=(1,1,1)\neq 0 \Rightarrow$ nejsou

2. vázané extrémy na hranici. Hranici rozdělíme na dvě části: $H_1=\{(x,y,z): z=1,\ x^2+y^2\le 1\}$
$H_2=\{(x,y,z): z\in[0,1),\ x^2+y^2=z\}$

H_1: $\tilde f(x,y)=f(x,y,1)=x+y+1$. Opět $\nabla\tilde f=(1,1) \Rightarrow$ není extrém v množině $\{(x,y): x^2+y^2<1\}$

$\Rightarrow$ Vyšetříme $\tilde f(x,y)$ na kružnici $x^2+y^2=1$, tj. $\tilde g(x,y)=x^2+y^2-1$. $\nabla\tilde g=(2x,2y)\neq 0$ na $\{\tilde g=0\}$.

$$\tilde L(x,y)=x+y+1-\lambda(x^2+y^2-1): \quad \left.\begin{aligned}\frac{\partial\tilde L}{\partial x}&=1-2\lambda x=0\\ \frac{\partial\tilde L}{\partial y}&=1-2\lambda y=0\\ \tilde g&=x^2+y^2-1=0\end{aligned}\right\}$$

$x=y=\frac{1}{2\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2\lambda^2}=1 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$A=\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$ $\quad B=\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)$

$\tilde f(A)=f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},1\right)=1+\sqrt2$, $\tilde f(B)=1-\sqrt2$

H_2: $g(x,y,z) = x^2+y^2-z \qquad \nabla g = (2x, 2y, -1) \neq 0$

$$L(x,y,z) = x+y+z-\lambda(x^2+y^2-z) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1-2\lambda x &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1-2\lambda y &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 1+\lambda &= 0 \\ g &= x^2+y^2-z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lambda=-1 \Rightarrow x=-1/2,\ y=-1/2 \\ &\Rightarrow z = 1/2 \\ &\Rightarrow C=(-1/2, -1/2, 1/2),\ C\in H_2 \\ &f(C) = -1/2 \end{aligned}$$

V bodě A nabývá f své nejvyšší hodnoty na M.

$f(C) < \tilde{f}(B) \Rightarrow$ V bodě C nabývá f své nejnižší hodnoty na M.

---

11) Chceme minimalizovat fci $f(x,y,z) = 2(xy+yz+xz)$ s vazbou $g(x,y,z) = xyz - V = 0$, kde V je daný objem. Samozřejmě pracujeme na $\{(x,y,z): x>0, y>0, z>0\}$.

$\nabla g = (yz, xz, xy) \neq 0$ na studované množině

$$L(x,y,z) = 2(xy+yz+xz) - \lambda(xyz-V) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2y+2z-\lambda yz &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2x+2z-\lambda xz &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2y+2x-\lambda xy &= 0 \\ g &= xyz - V &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\text{z 1. rce: } y = \frac{2z}{\lambda z-2} \\ &\text{z 2. rce: } x = \frac{2z}{\lambda z - 2} \end{aligned}\right\} x = y \\ &\Rightarrow 4x - \lambda x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{\lambda} = y \\ &\frac{4}{\lambda} = \frac{2z}{\lambda z - 2} \Rightarrow z = \frac{4}{\lambda} = x = y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^3 - V = 0,\ x = \sqrt[3]{V}$$

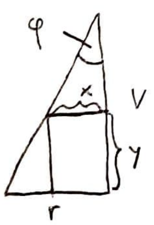
Podezřelý bod je $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = A$, $f(A) = 6V^{2/3}$. Protože $f(1,1,V) = 2+4V$ a pro všechna $V>0$ platí $6V^{2/3} \leq 2+4V$, je v bodě A lokální minimum

$\hookrightarrow$ ozn. $Z = V^{1/3}$: $4Z^3 - 6Z^2 + 2 = (Z-1)(4Z^2-2Z-2) = 2\underbrace{(Z-1)^2}_{\geq 0}\underbrace{(2Z+1)}_{\geq 0 \text{ pro kladná } Z}$

Ze všech kvádrů daného objemu má nejmenší povrch krychle.

---

12) Kužel má parametry r (poloměr podstavy) a v (výška). To jsou dané konstanty.



Výšku vepsaného hranolu označíme y a poloměr kružnice opsané základně hranolu ozn. x.

Vazební podmínka pak je $\frac{r}{v} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{v-y}$, kde φ je parametr daný r, v. $\varphi \in (0, \pi/2)$

Obsah n-úhelníku s kružnicí opsanou s poloměrem x je $S_n = \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n} \cdot x^2 =: Nx^2$

$\Rightarrow$ Objem hranolu je $f(x,y) = Nx^2y$, kde N je číslo závisející pouze na n

$g(x,y) = \frac{x}{v-y} - \frac{r}{v}$ a zajímá nás samozřejmě $\{(x,y): x\in(0,r),\ y\in(0,v)\}$

$\nabla g = \left(\frac{1}{v-y}, \frac{x}{(v-y)^2}\right) \neq 0$ na naší množině. $L(x,y) = Nx^2y - \lambda\left(\frac{x}{v-y} - \frac{r}{v}\right)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2Nxy - \frac{\lambda}{v-y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= Nx^2 - \frac{\lambda x}{(v-y)^2} = 0 \\ g &= \frac{x}{v-y} - \frac{r}{v} = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lambda = 2Nxy(v-y) \\ &Nx^2(v-y)^2 = 2Nx^2y(v-y) \\ &\Rightarrow (v-y) = 2y \Rightarrow \underline{y = \tfrac{v}{3}} \Rightarrow \underline{x = \tfrac{2}{3}r} \end{aligned}$$

Bod $A = \left(\frac{2}{3}r, \frac{1}{3}v\right)$ je očividně bodem maxima, protože $f(x,y) \to 0$ pro $x \to 0$

Ze všech hranolů má nejvyšší objem ten s třetinou výšky kužele.

13) Rovnice roviny slouží jako vazba, tedy $g(x,y,z) = ax+by+cz+d$

Vzdálenost bodů (x,y,z) a (p,q,r) je $f(x,y,z) = \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2}$

$\nabla g = (a,b,c)$ a skutečně alespoň jedno z těchto čísel musí být nenulové, aby rce roviny měla smysl.

$L(x,y,z) = \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2} - \lambda(ax+by+cz+d)$. Nechť $ap+bq+cr+d \neq 0$, jinak je vzdálenost očividně nula.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{x-p}{\sqrt{\cdots\cdots}} - \lambda a = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{y-q}{\sqrt{\cdots\cdots}} - \lambda b = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{z-r}{\sqrt{\cdots\cdots}} - \lambda c = 0 \\ g &= ax+by+cz+d = 0 \end{aligned}\right\}$$

z prvních tří rovnic: $\lambda^2a^2+\lambda^2b^2+\lambda^2c^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Pro $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ dostaneme

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c} \quad (\text{je-li např. } a=0, \text{ tak } x=p)$$

$$x = \frac{a}{c}(z-r)+p\,, \quad y = \frac{b}{c}(z-r)+q$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{c}(z-r)+ap+\frac{b^2}{c}(z-r)+bq+cz+d = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{(a^2+b^2)r}{a^2+b^2+c^2} - \frac{c\cdot(ap+bq+d)}{a^2+b^2+c^2}$$

$\Rightarrow z-r = -\frac{c\cdot(ap+bq+cr+d)}{a^2+b^2+c^2}$ a odtud už $y-q = -b\cdot\frac{ap+bq+cr+d}{a^2+b^2+c^2}$, $x-p = -a\frac{ap+bq+cr+d}{a^2+b^2+c^2}$

$$\Rightarrow f(A) = \underline{\underline{\frac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}}.$$

Očividně jde o minimum, f je shora neomezená.

---

14) Toto je mimořádně odporná úloha. Bez použití vázaných extrémů lze řešit jen lokálním extrémem funkce

$$f(t,s) = \sqrt{(X_1+at-X_2-ps)^2+(Y_1+bt-Y_2-qs)^2+(Z_1+ct-Z_2-rs)^2} \qquad t,s\in\mathbb{R}$$

Výsledek je
$$f(t_0,s_0) = \left|\det\begin{pmatrix} X_1-X_2 & Y_1-Y_2 & Z_1-Z_2 \\ a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}\right| \cdot \left((aq-bp)^2+(ar-cp)^2+(br-cq)^2\right)^{-1/2}$$

---

15) a) Budeme zkoumat $f(x_1,\dots,x_n) = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ s vazbou $g(x_1,\dots,x_n) = x_1+x_2+\dots+x_n - Cn$ pro nějaké dané $C\geq 0$. Chceme ukázat, že $f(x_1,\dots,x_n)\leq C$ a uvažujeme $x_i\geq 0\ \forall i$

$\nabla g = (1,1,\dots,1)\neq 0$

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} - \lambda(x_1+x_2+\dots+x_n-Cn)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}{x_i} - \lambda = 0 \Rightarrow x_i = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}{\lambda} \text{ platí } \forall i=1,\dots,n \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ všechna x_i jsou si rovna

$$g = x_1+x_2+\dots+x_n - Cn = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = C \quad \forall i=1,\dots,n$$

$f(C,C,\dots,C) = \sqrt[n]{C^n} = C$. Očividně jde o maximum, protože pro $x_1=0$ je $f=0$.

b) Důkaz indukcí podle m.

$m=1$: triviálně splněno jako rovnost.

Nechť nerovnost platí pro všechna $n<m$ a dokážeme ji pro $n=m$

Budeme hledat extrémy funkce $f(x_1,\dots,x_m)=\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m} y_i^q\right)^{1/q}$

s vazební podmínkou $g(x_1,\dots,x_m)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_my_m-C$, kde tedy $x_i\geq 0$, $y_i\geq 0$ $\forall i=1,\dots,m$

Je-li některé $x_j=0$ (BÚNO nechť $j=m$), pak

$$\sum_{i=1}^{m} x_iy_i=\sum_{i=1}^{m-1}x_iy_i \underset{\text{I.P.}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{m-1}x_i^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m-1}y_i^q\right)^{1/q}=\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{m-1}y_i^q\right)^{1/q}\leq\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{m}y_i^q\right)^{1/q}$$

a dokazovaná nerovnost platí. Dále nechť jsou všechna $x_i\neq 0$.

$\nabla g=(y_1,y_2,\dots,y_m)\neq 0$ protože pokud je $y_1=y_2=\dots=y_m=0$, tak nerovnost platí jako rovnost

$$L(x_1,\dots,x_m)=\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}y_i^q\right)^{1/q}-\lambda\left(\sum_1^m x_iy_i-C\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{1}{p}\left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}-1}\cdot p\cdot x_j^{p-1}\cdot\left(\sum y_i^q\right)^{1/q}-\lambda y_j=0 \Rightarrow \frac{x_j^{p-1}}{y_j}=\frac{\lambda}{\left(\sum y_i^q\right)^{1/q}\cdot\left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1-p}{p}}}=\frac{\lambda\left(\sum x_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\left(\sum y_i^q\right)^{1/q}}$$

Pravá strana nezávisí na j a je stejná pro všechny $j=1,\dots,m$

Do vazby dosadíme $x_j=x_1\cdot\left(\frac{y_j}{y_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ a máme $x_1y_1+\sum_{j=2}^{m}x_1\cdot\frac{y_j^{\frac{p}{p-1}}}{y_1^{\frac{1}{p-1}}}=C$

$$x_1=\frac{C\cdot y_1^{\frac{1}{p-1}}}{\sum_{i=1}^{m}y_i^{\frac{p}{p-1}}}=\frac{C\cdot y_1^{\frac{1}{p-1}}}{\sum_{i=1}^{m}y_i^q}, \text{ protože } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Podobně $x_j=\frac{C}{\sum_1^m y_i^q}\cdot y_j^{\frac{1}{p-1}}$ $\forall j=1,\dots,m$

Označme příslušný stacionární bod A a máme

$$f(A)=\frac{C}{\sum_1^m y_i^q}\cdot\left(\sum_1^m y_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_1^m y_i^q\right)^{1/q}=\left(\sum_1^m y_i^q\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}\cdot C=C$$

Protože pro volbu $x_m=0$ jsme už ukázali (díky indukčnímu předpokladu) $f(x_1,\dots,x_m)\geq C$, je A bodem lokálního minima a proto platí $f(x_1,\dots,x_m)\geq C$ všude.

---

16) Náboj umístěný v bodě $\vec{R}$ budí v bodě $\vec{r}$ potenciál $V=C\frac{Q}{|\vec{R}-\vec{r}|}$.

Potenciální energie se pak rovná $Cq\cdot\sum_{0,A,B,C}\frac{Q_i}{|\vec{R}_i-\vec{r}|}$. My chceme, aby v bodě $(1,1,1)$ byl lokální extrém potenciální energie a případně lokální minimum, aby rovnováha byla stabilní.

My však vidíme, že potenciál je nejnižší v nekonečnu a extrém, který případně najdeme, bude maximum, rovnováha tak nebude stabilní.

Budeme tedy hledat extrémy funkce

$$f(x,y,z)=Q\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+Q_A\cdot\left((x-3)^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}+Q_B\cdot\left(x^2+(y-3)^2+z^2\right)^{-1/2}+Q_C\cdot\left(x^2+y^2+(z-4)^2\right)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -Q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot x - Q_A\left((x-3)^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot(x-3) - Q_B\left(x^2+(y-3)^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot x - Q_C\left(x^2+y^2+(z-4)^2\right)^{-3/2}\cdot x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = -Q\cdot 3^{-3/2} - Q_A\cdot 6^{-3/2}\cdot(-2) - Q_B\cdot 6^{-3/2} - Q_C\cdot 11^{-3/2} = 0$$

analogicky: $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = -Q\cdot 3^{-3/2} - Q_A\cdot 6^{-3/2} - Q_B\cdot 6^{-3/2}\cdot(-2) - Q_C\cdot 11^{-3/2} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -Q\cdot 3^{-3/2} - Q_A\cdot 6^{-3/2} - Q_B\cdot 6^{-3/2} - Q_C\cdot 11^{-3/2}\cdot(-3) = 0$$

$$\Rightarrow Q\cdot 3^{-3/2}\cdot 3 + Q_C\cdot 11^{-3/2}\cdot(-1) = 0 \Rightarrow \underline{Q_C = Q\cdot 11^{3/2}\cdot 3^{-1/2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow Q\cdot 3^{-3/2} + Q\cdot 3^{-1/2} + Q_A\cdot 6^{-3/2} - 2Q_B 6^{-3/2} = 0\\ Q\cdot 3^{-3/2} + Q\cdot 3^{-1/2} - 2Q_A\cdot 6^{-3/2} + Q_B 6^{-3/2} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow 3Q_A\cdot 6^{-3/2} = 3Q_B 6^{-3/2} \Rightarrow Q_A = Q_B$$

$$Q_A\cdot 6^{-3/2} = Q\cdot 4\cdot 3^{-3/2} \Rightarrow \underline{Q_A = Q_B = Q\cdot 8\sqrt{2}}$$

<u>REGULÁRNÍ ZOBRAZENÍ</u>

Jacobiho matice zobrazení $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ v bodě $a\in\mathbb{R}^N$

$$\mathbb{J}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(a)\end{pmatrix}$$

Jacobián je determinant $\mathbb{J}_f(a)$, označme $J_f(a)$

f je regulární zobrazení na $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, je-li Ω otevřená, $f\in C^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ a $J_f\neq 0$ na Ω

Například $f: (r,\varphi)\mapsto(x,y)$ tak, že $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ je regulární na $(0,\infty)\times(0,2\pi)$

$$\mathbb{J}_f = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} \Rightarrow J_f = r > 0$$

<u>Věta o regulárním zobrazení</u>

Nechť $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ je regulární na Ω (otevřená množina). Pak $f(\Omega)$ je otevřená a f je lokálně prosté (f je prosté na nějakém okolí každého bodu).

Je-li navíc f prosté na Ω, pak f^{-1} je regulární zobrazení na $f(\Omega)$ a $\forall x\in\Omega$ platí $\mathbb{J}_f(x) = \left(\mathbb{J}_{f^{-1}}(f(x))\right)^{-1}$. Je-li $f\in C^k(\Omega;\mathbb{R}^N)$, pak $f^{-1}\in C^k(f(\Omega);\mathbb{R}^N)$.

Z inverze matic plyne $J_f(x) = \dfrac{1}{J_{f^{-1}}(f(x))}$

---

17) $(z_y)^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (z_x)^2 z_{yy} = 0$ $\qquad x = u$, $y = v$, $z = w$ $\qquad$ u nás zajímá nová funkce $u(v,w)$

Princip si ukážeme jak v obecnosti, tak v navržené speciální transformaci

Máme
$$u = a(x,y,z(x,y)) = x$$
$$v = b(x,y,z(x,y)) = y$$
$$w = c(x,y,z(x,y)) = z$$

Abychom mohli vyjádřit u jako funkci v a w, potřebujeme obecnější větu o implicitních funkcích, která funguje pro

$$D_{bc} = \begin{vmatrix} b_y + b_z z_y & b_z \\ c_y + c_z z_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$, což je příslušný subdeterminant

Jacobiho matice $(x,y,z) \mapsto (u,v,w)$, tedy
$$\begin{pmatrix} a_x + a_z z_x & a_y + a_z z_y & a_z \\ b_x + b_z z_x & b_y + b_z z_y & b_z \\ c_x + c_z z_x & c_y + c_z z_x & c_z \end{pmatrix}$$

V našem případě $b_y = c_z = 1$ a ostatní derivace jsou nula, proto $D_{b,c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z_y & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Existuje tak funkce $u = h(v,w) = a(p(v,w), q(v,w), z(p(v,w), q(v,w))) = a(x,y,z(x,y))$

Podíváme se na tento vztah v proměnných x, y: $h(v(x,y), w(x,y)) = a(x,y,z(x,y))$

a derivujeme podle x a y: $h_v v_x + h_w w_x = a_x + a_z z_x$ $\quad\Big|\quad$ $h_v v_y + h_w w_y = a_y + a_z z_y$

$v = b(x,y,z(x,y))$
$w = c(x,y,z(x,y))$ $\Rightarrow$ $h_v(b_x + b_z z_x) + h_w(c_x + c_z z_x) = a_x + a_z z_x$ $\quad\Big|\quad$ $h_v(b_y + b_z z_y) + h_w(c_y + c_z z_y) = a_y + a_z z_y$

Odtud vyjádříme z_x a z_y:
$$z_x = \frac{h_v b_x + h_w c_x - a_x}{a_z - h_v b_z - h_w c_z} \left(= \frac{-1}{-h_w} = \boxed{\frac{1}{h_w}} \text{ v našem případě} \right)$$
$$z_y = \frac{h_v b_y + h_w c_y - a_y}{a_z - h_v b_z - h_w c_z} \left(= \frac{h_v}{-h_w} = \boxed{-\frac{h_v}{h_w}} \text{ v našem případě} \right)$$

Druhé derivace získáme derivací z_x a z_y:
$$z_{xx} = \left(\frac{1}{h_w}\right)_x = -\frac{1}{h_w^2}\cdot(h_w)_x = -\frac{1}{h_w^2}\cdot(h_{wv} v_x + h_{ww} w_x) = -\frac{1}{h_w^2}\cdot\left(h_{wv}\cdot(b_x + b_z z_x) + h_{ww}(c_x + c_z z_x)\right) = -\frac{1}{h_w^2}\cdot h_{ww} z_x = \boxed{-\frac{h_{ww}}{h_w^3}}$$

$$z_{xy} = -\frac{1}{h_w^2}(h_{wv} v_y + h_{ww} w_y) = -\frac{1}{h_w^2}(h_{wv} + h_{ww} z_y) = \boxed{\frac{h_{ww} h_v}{h_w^3} - \frac{h_{wv}}{h_w^2}}$$

$$z_{yy} = -\frac{1}{h_w^2}\cdot\left((h_{vv} v_y + h_{vw} w_y) h_w - (h_{wv} v_y + h_{ww} w_y) h_v\right) = \boxed{-\frac{h_{vv}}{h_w} + 2\frac{h_{vw} h_v}{h_w^2} - \frac{h_{ww} h_v^2}{h_w^3}}$$

Konečně můžeme rovnici přepsat
$$\frac{h_v^2}{h_w^2}\cdot\left(-\frac{h_{ww}}{h_w^3}\right) - 2\cdot\frac{1}{h_w}\left(-\frac{h_v}{h_w}\right)\cdot\left(\frac{h_{ww} h_v}{h_w^3} - \frac{h_{vw}}{h_w^2}\right) + \frac{1}{h_w^2}\cdot\left(-\frac{h_{vv}}{h_w} + 2\frac{h_{vw} h_v}{h_w^2} - \frac{h_{ww} h_v^2}{h_w^3}\right) = 0$$

Zůstává pouze $\frac{h_{vv}}{h_w^3} = 0$, tedy $h_{vv} = 0 \Rightarrow h_v = C_1(w)$
$$\Rightarrow h = v \cdot C_1(w) + C_2(w)$$

což můžeme přepsat v původních souřadnicích jako
$$\underline{\underline{x = y \cdot C_1(z) + C_2(z)}}$$

18) Označme $\tilde{f}(r,\varphi,\theta) = f(x(r,\varphi,\theta), y(r,\varphi,\theta), z(r,\varphi,\theta))$,

kde tedy
$$x(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta$$

Máme
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = f_x x_r + f_y y_r + f_z z_r = f_x \sin\theta\cos\varphi + f_y \sin\theta\sin\varphi + f_z\cos\theta$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = f_x x_\theta + f_y y_\theta + f_z z_\theta = f_x r\cos\theta\cos\varphi + f_y r\cos\theta\sin\varphi - f_z r\sin\theta$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} = f_x x_\varphi + f_y y_\varphi + f_z z_\varphi = -f_x r\sin\theta\sin\varphi + f_y r\sin\theta\cos\varphi$$

$$\Rightarrow r\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\cos\theta = r f_x \sin^2\theta\cos\varphi + r f_y \sin^2\theta\sin\varphi + r f_x\cos^2\theta\cos\varphi + r f_y\cos^2\theta\sin\varphi$$
$$= r f_x\cos\varphi + r f_y\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \left(r\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\cos\theta\right)\cdot\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\sin\varphi = r f_x\sin\theta\cos^2\varphi + r f_x \sin\theta\sin^2\varphi = r f_x\sin\theta$$

$$\Rightarrow \underbrace{f_x = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\cdot\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}}$$

---

19) $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$

$$u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$$

Podobně jako v příkladu 17, ... potřebujeme $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$u = a(x,y,z(x,y)) = x$$
$$v = b(x,y,z(x,y)) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$
$$w = c(x,y,z(x,y)) = \frac{1}{z(x,y)} - \frac{1}{x}$$

Chceme $w = h(u,v)$, tj. potřebujeme nenulovost

$$D_{a,b} = \begin{vmatrix} a_x + a_z z_x & a_y + a_z z_y \\ b_x + b_z z_x & b_y + b_z z_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2} \neq 0$$

$$w = h(u,v) = h(u(x,y), v(x,y)) = c(x,y,z(x,y)) = \frac{1}{z(x,y)} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow h_u u_x + h_v v_x = c_x + c_z z_x, \text{ tedy } h_u + h_v\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}z_x \Rightarrow x^2 z_x = z^2 - z^2 h_v - x^2 z^2 h_u$$

$$h_u u_y + h_v v_y = c_y + c_z z_y, \text{ tedy } -h_v\cdot\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{z^2}z_y \Rightarrow y^2 z_y = h_v z^2$$

$\Rightarrow x^2 z_x + y^2 z_y = z^2 - x^2 z^2 h_u$ $\Rightarrow$ zadaná rovnost se nám přepíše na $x^2 z^2 \cdot h_u = 0$ a potřebujeme vyjádřit ještě x a z pomocí u, v, w. Máme $x = u$ a $\frac{1}{z} = w + \frac{1}{x} = w + \frac{1}{u} = \frac{uw+1}{u}$

$$\Rightarrow z = \frac{u}{uw+1}$$

A dostáváme $\dfrac{u^4 \cdot \frac{\partial w}{\partial u}(u,v)}{(u\cdot w(u,v)+1)^2} = 0$. Protože $u \neq 0$ (viz $x \neq 0$) a ze vztahu $\frac{1}{z} = \frac{uw+1}{u}$ plyne $uw + 1 \neq 0$, můžeme získanou rovnost napsat jen jako

$$\frac{\partial w}{\partial u}(u,v) = 0.$$

20) $z_{xx}+z_{yy}=0$ $\qquad u=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$.

$$u=a(x,y,z(x,y))=\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$v=b(x,y,z(x,y))=\frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$w=c(x,y,z(x,y))=z$$

Chceme $w=h(u,v) \Rightarrow$

$$D_{a,b}=\begin{vmatrix}\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\cdot\left((y^2-x^2)^2+4x^2y^2\right)=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\neq 0$$

$$w=h(u,v)=h(u(x,y),v(x,y))=z(x,y)$$
$$h_u u_x+h_v v_x=z_x \Rightarrow h_u\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+h_v\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=z_x$$
$$h_u u_y+h_v v_y=z_y \Rightarrow \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}h_u+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}h_v=z_y$$

Výsledek zderivujeme ještě jednou, přičemž opět $h_u(u(x,y),v(x,y))$ derivujeme jako složenou fci

$$z_{xx}=(h_{uu}u_x+h_{uv}v_x)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+h_u\cdot\frac{-2x\cdot(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)\cdot 4x\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}+(h_{uv}u_x+h_{vv}v_x)\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+h_v\cdot\frac{2y(x^2+y^2)^2-2xy\cdot 4x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$z_{yy}=(h_{uu}u_y+h_{uv}v_y)\cdot\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)+h_u\cdot\frac{-2x\cdot(x^2+y^2)^2+2xy\cdot 4y\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}+(h_{uv}u_y+h_{vv}v_y)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+h_v\cdot\frac{2y(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)\cdot 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

Sečteme a rovnou vynásobíme výrazem $(x^2+y^2)^4$:

$$0=h_{uu}\cdot\left[(y^2-x^2)^2+4x^2y^2\right]+h_{uv}\cdot\left[+2xy(y^2-x^2)-2xy(y^2-x^2)+2xy(y^2-x^2)-2xy(y^2-x^2)\right]+h_{vv}\cdot\left[4x^2y^2+(y^2-x^2)^2\right]$$
$$+h_u\cdot\left[-4x(x^2+y^2)^2-4x(y^4-x^4)+4x\cdot(2y^2x^2+2y^4)\right]+h_v\cdot\left[4y(x^2+y^2)^2-4y(y^4-x^4)-4y(2x^4+2x^2y^2)\right]$$
$$=h_{uu}\cdot(x^2+y^2)^2+h_{vv}(x^2+y^2)^2 \Rightarrow h_{uu}+h_{vv}=0 \text{ neboli } W_{uu}+W_{vv}=0$$

Jinými slovy Laplaceův operátor $\Delta z=z_{xx}+z_{yy}$ se danou změnou souřadnic ve 2D nezmění — až na násobení/dělení výrazem $(x^2+y^2)^2$

---

21) $x^2z_{xx}-(x^2+y^2)z_{xy}+y^2z_{yy}=0$ $\qquad u=x+y$, $\quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ... $x\neq 0, y\neq 0$

Opět $D_{a,b}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$ ... Navíc vyřadí body $x=\pm y$

$$w=h(u,v)=h(u(x,y),v(x,y))=z(x,y) \Rightarrow h_u-h_v\cdot\frac{1}{x^2}=z_x \quad \text{a} \quad h_u-\frac{1}{y^2}h_v=z_y$$
$$z_{xx}=\left(h_{uu}-h_{uv}\cdot\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2}{x^3}h_v-\frac{1}{x^2}\left(h_{uv}-h_{vv}\frac{1}{x^2}\right)=h_{uu}-\frac{2}{x^2}h_{uv}+\frac{1}{x^4}h_{vv}+\frac{2}{x^3}h_v$$
$$z_{xy}=\left(h_{uu}-\frac{1}{y^2}h_{uv}\right)-\frac{1}{x^2}\left(h_{uv}-\frac{1}{y^2}h_{vv}\right)=h_{uu}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)h_{uv}+\frac{1}{x^2y^2}h_{vv}$$
$$z_{yy}=\left(h_{uu}-\frac{1}{y^2}h_{uv}\right)+\frac{2}{y^3}h_v-\frac{1}{y^2}\left(h_{uv}-\frac{1}{y^2}h_{vv}\right)=h_{uu}-\frac{2}{y^2}h_{uv}+\frac{1}{y^4}h_{vv}+\frac{2}{y^3}h_v$$

$$x^2 z_{xx} - (x^2+y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} = x^2 h_{uu} - 2h_{uv} + \frac{1}{x^2} h_{vv} + \frac{2}{x} h_v$$
$$- (x^2+y^2) h_{uu} + \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2} h_{uv} - \frac{1}{y^2} h_{vv} - \frac{1}{x^2} h_{vv}$$
$$+ y^2 h_{uu} - 2h_{uv} + \frac{1}{y^2} h_{vv} + \frac{2}{y} h_v$$
$$= \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2} h_{uv} + 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) h_v \text{ . Víme } \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = v$$

a zbývá vyjádřit $\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2}$ pomocí u a v. Máme $u \cdot v = (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2$

$$\Rightarrow u^2v^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 + 4\frac{x}{y} + 4\frac{y}{x} + 2$$
$$= \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4u \cdot v - 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2y^2} = uv(uv-4)$$

Zadaná rovnice je tak přepsaná jako $uv(uv-4) z_{uv} + 2v z_v = 0$ a protože $v \neq 0$

$$u(uv-4) z_{uv} + 2 z_v = 0$$