Fundamentální řešení ODR

Definice: Je-li L diferenciální operátor (obyčejný či parciální), pak fundamentálním řešením rce $\underline{Lu=f}$ nazýváme řešení u_L diferenciální rovnice (ve smyslu distribucí)

$$(\text{FŘ}) \qquad L u_L = \delta. \qquad \left(\Rightarrow u = f * u_L,\ Lu = L(f * u_L) = f * L u_L = f * \delta = f \right)$$

Pozn.:
- Není určeno jednoznačně, ale až na lib. řešení homogenní rce.
- $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}$, kde $a_n \neq 0$ je obyč. dif. operátor s konst. koeficienty

$\Downarrow$

řešení hledáme dvěma způsoby

① Slepování z klasických řešení $Lu = 0$.

Věta: Nechť y^+ a y^- jsou řešení rce $Ly = 0$ v klasickém smyslu taková, že

$$\frac{d^k y^+}{dx^k}(0) = \frac{d^k y^-}{dx^k}(0), \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$\frac{d^{n-1} y^+}{dx^{n-1}}(0) - \frac{d^{n-1} y^-}{dx^{n-1}}(0) = \frac{1}{a_n},$$

potom je

$$u_L = \begin{cases} y^+(x) & x > 0 \\ y^-(x) & x < 0 \end{cases} \in \mathcal{D}' \text{ fundamentálním řešením rovnice (FŘ).}$$

Pozn.: Speciálně lze volit $y^- \equiv 0$, pak za y^+ je třeba brát řešení splňující

$$y^{+(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$
$$y^{+(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n}.$$

Případně naopak lze volit $y^+ \equiv 0$ a brát

$$y^{-(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$
$$y^{-(n-1)}(0) = -\frac{1}{a_n}.$$

Kombinací s řešeními homogenní rce lze toto řešení z $\mathcal{D}'$ upravit, aby mělo lepší vlastnosti, např. z $\mathcal{S}'$.

(2) Metoda Fourierovy transformace

FŘ: $$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k u_L}{dx^k} = \delta \quad / \mathcal{F}.T.$$

$$\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (2\pi i \xi)^k\right)}_{P(\xi) \ldots \text{ polynom řádu } n} \hat{u}_L = 1 \qquad \left(\hat{u}_L = \mathcal{F}(u_L)\right)$$

- Je-li $P(\xi) \neq 0$ pro $\forall \xi \in \mathbb{R}$, je fce $\frac{1}{P(\xi)}$ pomalu rostoucí, a tedy $\in \mathcal{S}'$.
- Stačí tedy najít $$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(\xi)}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x \xi}}{P(\xi)} d\xi \overset{\text{reziduová věta}}{=} \pm 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{\xi_j} \frac{e^{2\pi i x \xi}}{P(\xi)},$$ kde pro $x > 0$ se sčítá přes všechny kořeny ξ_j polynomu $P(\xi)$ ležící v $\operatorname{Im} \xi > 0$ a bere se znaménko $\oplus$, resp. pro $x < 0$ přes $\operatorname{Im} \xi < 0$ a bere se znaménko $\ominus$.
- Pro st $P = 1$ existuje integrál jen ve smyslu hlavní hodnoty $\left(= \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} \ldots\right)$

Př. 1: Nalezněte řešení následující rovnice v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$$y' + ay = \delta, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) lepením: Homogenní rovnice: $y' + ay = 0$

$$y_h = C_1 e^{-ax}$$

Uvažujeme tedy: $y^+ = c_1^+ e^{-ax}$

$$y^- = c_1^- e^{-ax}$$

podmínky dle věty

$$y^+(0) - y^-(0) = 1$$

$$c_1^+ - c_1^- = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{označíme } c_1^- =: c \;\Downarrow\; c_1^+ = 1 + c$$

$$\Downarrow$$

$$y = \begin{cases} c e^{-ax} & x < 0 \\ (c+1) e^{-ax} & x > 0 \end{cases} \quad \text{je řešením v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

- Diskuze, jak vypadá řešení v $\mathcal{S}'$:

$\underline{a>0}$: řešení $\underline{ce^{-ax}} \notin \mathcal{S}'$ pro $x<0$, odečteme homogenní řešení $y_h = ce^{-ax}$ (pořád je řešení)

$$y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-ax} & x > 0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

$\underline{a<0}$: $(c+1)e^{-ax} \notin \mathcal{S}'$ pro $x<0$ a $c \neq -1$, volbou $c=-1$ dostaneme

$$y = \begin{cases} -e^{-ax} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

b) přes Fouriera:

$$y' + ay = \delta \;/\; \mathcal{F}$$

$$(2\pi i\xi + a)\hat{y} = 1$$

$$\hat{y} = \frac{1}{2\pi i\left(\xi - \frac{ai}{2\pi}\right)} \notin L^1, \text{ ale } \in L^2 \checkmark$$

$\boxed{a>0}$:

$$y = \mathcal{F}^{-1}(\hat{y}) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{e^{2\pi i\xi x}}{\xi - \frac{ai}{2\pi}}\, d\xi$$

$x>0$:
$$= \frac{1}{2\pi i}\, 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{ia}{2\pi}} \frac{e^{2\pi i \xi x}}{\xi - \frac{ia}{2\pi}} = e^{-ax}$$

$x<0$: Není žádný kořen $\operatorname{Im}\xi < 0$ ... $= 0$

$$\left(\operatorname{Im}\frac{ia}{2\pi} = \frac{a}{2\pi} > 0\right)$$

$\boxed{a<0}$: $\operatorname{Im}\frac{ia}{2\pi} = \frac{a}{2\pi} < 0$

$x>0$ ... $y = 0$ (kořeny mají $\operatorname{Im}\xi < 0$)

$x<0$ ... $y = -\frac{1}{2\pi i}\, 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{ia}{2\pi}} \frac{e^{2\pi i\xi x}}{\xi - \frac{ia}{2\pi}} = -e^{-ax}$

Celkem:

$a>0$: $y = \begin{cases} 0 & x<0 \\ e^{-ax} & x>0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ... automaticky, neboť máme pomocí F.T.

$a<0$: $y = \begin{cases} -e^{-ax} & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Př. 5: Nalezněte fundamentální řešení rce

$$-y^{(4)} + a^2 y'' = \delta,$$

pokud $y(0)=0$ a $y(x) = y(-x)$, $a>0$

Lepením (obecnější řešení): homogenní rce: $-y^{(4)} + a^2 y'' = 0$

hledáme ve tvaru $e^{\lambda x}$ $\quad -\lambda^4 + a^2\lambda^2 = 0$

$$\lambda^2(a^2-\lambda^2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 0,\quad \lambda_3 = a,\quad \lambda_4 = -a$$

$$\underline{y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}} \Leftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$y^+ = C_1^+ + C_2^+ x + C_3^+ e^{ax} + C_4^+ e^{-ax}$$

$$y^- = C_1^- + C_2^- x + C_3^- e^{ax} + C_4^- e^{-ax}$$

Podmínky:

$y^+(0) = y^-(0) \quad : \quad C_1^+ + C_3^+ + C_4^+ = C_1^- + C_3^- + C_4^- \quad (1)$

$y^{+\prime}(0) = y^{-\prime}(0) \quad : \quad C_2^+ + a(C_3^+ - C_4^+) = C_2^- + a(C_3^- - C_4^-) \quad (2)$

$y^{+\prime\prime}(0) = y^{-\prime\prime}(0) \quad : \quad a^2(C_3^+ + C_4^+) = a^2(C_3^- + C_4^-) \quad (3)$

$y^{+\prime\prime\prime}(0) - y^{-\prime\prime\prime}(0) = \frac{1}{a_n} = -1 \quad : \quad a^3\left((C_3^+ - C_4^+) - (C_3^- - C_4^-)\right) = -1 \quad (4)$

Označíme: $\Delta C_i = C_i^+ - C_i^-$, pak (1)–(4) vypadá následovně

(1') $\Delta C_1 + \Delta C_3 + \Delta C_4 = 0$

(2') $\Delta C_2 + a(\Delta C_3 - \Delta C_4) = 0$

(3') $a^2(\Delta C_3 + \Delta C_4) = 0$

(4') $a^3(\Delta C_3 - \Delta C_4) = -1$

- $a^2(1') - (3') \Rightarrow \Delta C_1 = 0$
- $a(3') + (4') \Rightarrow \Delta C_3 = \frac{-1}{2a^3}$
- $\Delta C_4 = \frac{1}{2a^3}$
- $(2') \Rightarrow \Delta C_2 = \frac{1}{a^2}$

$c_i =: c_i$, $c_i^T = c_i + \Delta c_i$ (6)

$$\Rightarrow \quad y = \begin{cases} c_1 + c_2 x + c_3 e^{ax} + c_4 e^{-ax} & x<0 \\ c_1 + \left(c_2 + \frac{1}{a^2}\right)x + \left(c_3 - \frac{1}{2a^3}\right)e^{ax} + \left(c_4 + \frac{1}{2a^3}\right)e^{-ax} & x>0 \end{cases}$$

$$\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Aby bylo $\in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, musíme vynulovat $c_4 e^{-ax}$ a $\left(c_3 - \frac{1}{2a^3}\right)e^{ax}$, které nejsou z $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, pro $a>0$.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_4 &= 0 \\ c_3 &= \frac{1}{2a^3} \end{aligned}}$$

$$y = \begin{cases} c_1 + c_2 x + \frac{1}{2a^3} e^{ax}, & x<0 \\ c_1 + \left(c_2 + \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{1}{2a^3} e^{-ax}, & x>0 \end{cases} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

- Pokud chceme navíc $y(0) = 0$

$$\Downarrow$$

$$c_1 + \frac{1}{2a^3} = 0 \Rightarrow \underline{c_1 = -\frac{1}{2a^3}}$$

- Pokud chceme navíc sudost y, tj: $y(x) = y(-x)$, máme

$$\underline{-\frac{1}{2a^3}} + c_2(-x) + \underline{\frac{1}{2a^3} e^{-ax}} = \underline{-\frac{1}{2a^3}} + c_2 x + \frac{x}{a^2} + \underline{\frac{1}{2a^3} e^{-ax}}$$

$$\left(2c_2 + \frac{1}{a^2}\right)x = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = \frac{-1}{2a^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{2a^3} - \frac{1}{2a^2}x + \frac{1}{2a^3} e^{ax} & x<0 \\ -\frac{1}{2a^3} + \frac{1}{2a^2}x + \frac{1}{2a^3} e^{-ax} & x>0 \end{cases}$$

<u>neboli</u>:

$$\underline{y = -\frac{1}{2a^3} + \frac{1}{2a^2}|x| + \frac{1}{2a^3} e^{-a|x|}.}$$

Poissonova sumační formule

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pak $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \mathcal{F}(\varphi)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \varphi(n)}$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{\mathcal{F}(\delta_\Sigma) = \delta_\Sigma}$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

vzorkovací distribuce: $\delta_\Sigma := \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \delta_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \delta_0(x-n)$

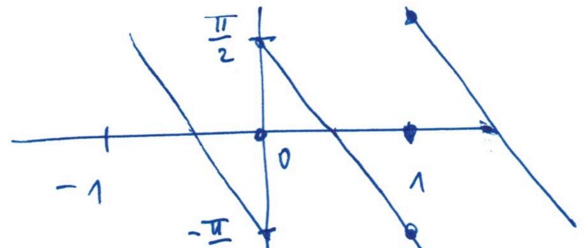
$\Leftarrow$ platí neboť $\mathcal{F}(\delta_\Sigma) = \delta_\Sigma \Leftrightarrow \langle \mathcal{F}(\delta_\Sigma), \varphi\rangle = \langle \delta_\Sigma, \varphi\rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi)(n) = \langle \delta_\Sigma, \mathcal{F}(\varphi)\rangle \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \varphi(n).$$

Odvodíme si platnost Poissonovy sumační formule.

- na intervalu $(0,1)$ platí $f = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n}$

(klasická Fourierova řada)



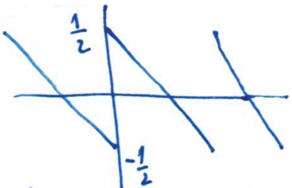
- $\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\varphi \, dx = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{N}{}' \frac{\sin(2\pi n x)}{n} \varphi \, dx$

- $\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} 2\pi \sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n x)\, \varphi(x)\, dx = -\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{N}{}' \frac{\sin(2\pi n x)}{n} \varphi' \, dx$

$$= -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \int_n^{n+1} f\varphi' \, dx = -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2} - x\right)\varphi' \, dx$$

p.p.

$$= -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left[\left(\tfrac{1}{2} - x\right)\varphi \right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} (-1)\,\varphi \right) dx$$



$$= -\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left(-\tfrac{1}{2}\, \varphi(n+1) - \tfrac{1}{2}\,\varphi(n)\right) + \int_n^{n+1} \varphi(x)\,dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n+1) + \varphi(n) \; - \pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) \; - \pi \langle T_1, \varphi \rangle = \pi \left(\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle \right)$$

$\Rightarrow$ $$2 \lim_{N\to\infty} T_{\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n x)} = \delta_\Sigma - T_1 \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

členy se sinem vypadnou kvůli lichosti

dále $$\lim_{N\to\infty} T_{\sum_{-N}^{N} e^{-2\pi i n x}} = \lim_{N\to\infty} T_{\sum_{-N}^{N} \cos(2\pi n x) - i \sin(2\pi n x)} = \lim_{N\to\infty} T_{\sum_{-N}^{N} \cos(2\pi n x)}$$

$$= \lim_{N\to\infty} T_{2\sum_{1}^{N} \cos(2\pi n x)} + T_1 = \delta_\Sigma$$

Nakonec: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle T_{e^{-2\pi i n x}}, \varphi \rangle = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta_n(x), \varphi \rangle}_{\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n).$$