Sada příkladů 2/11

Funkce více proměnných

Totální diferenciál

V následujících příkladech zjistěte, kde má funkce totální diferenciál. Určete ho

1. $f(x,y) = \ln(x+y)$
2. $f(x,y,z) = \cos x \, \cosh y$
3. $f(x,y) = |x||y|$
4. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$
5. $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$
6. $f(x,y,x) = x^{\frac{y}{z}}$.
7. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro jaké hodnoty α bude mít funkce
$$f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2+y^2}$$
totální diferenciál 1. řádu v bodě $(0,0)$?
8. Napište diferenciál funkce $f(x,y,z)$, kde $x = u^2+v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = 2uv$.
9. Nechť f má totální diferenciál v bodě (1,1) a $g(t,u) = f(f(u,t), f(t,u))$. Vypočtěte $\frac{\partial g}{\partial x_1}(1,1)$, je-li $f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) = 2$.
10. Spočtěte $d^3 f$, je-li $f(x,y,z) = xyz$.
11. Pomocí diferenciálu spočtěte přibližně
(a) $1,02^2.2,003^3.3,004^3$ (b) $\sin 29^{\mathrm{o}} \cdot \mathrm{tg}\, 46^{\mathrm{o}}$

Obyčejné diferenciální rovnice

Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu

Nalezněte obecná řešení rovnic. Pokud nejsou ve tvaru totálního diferenciálu, hledejte vhodný integrační faktor

12.
$$2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

13.
$$\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x - (2y + x\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}y = 0$$

14.
$$\frac{3x^2 + y^2}{y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}\,\mathrm{d}y = 0$$

15.
$$(x^2 + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mu = \mu(x)$$

16.
$$(xy^2 + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mu = \mu(y)$$

17.
$$(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3)\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mu = \mu(x+y)$$

18.
$$x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0, \quad \mu = \mu(xy).$$

TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

Totální diferenciál je <u>lineární zobrazení</u> $df(a): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tj. pro $h \in \mathbb{R}^N$ je $df(a)(h) \in \mathbb{R}$, takové, že platí $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df(a)(h)}{\|h\|} = 0$.

Protože každé lineární zobrazení $L(h)$ lze psát jako $L(h) = A \cdot h$ pro nějaký vektor $A \in \mathbb{R}^N$, lze $df(a)$ ztotožnit s vektorem a psát $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - A \cdot h}{\|h\|} = 0$

Pokud má f v bodě a totální diferenciál, pak $\boxed{df(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h}$

Má-li f na okolí a parciální derivace a ty jsou spojité v a, pak má f v bodě a TD.

TD řádu k fce f v bodě a je k-lineární zobrazení $d^k f(a) : \mathbb{R}^{Nk} \to \mathbb{R}$ t.ž.

$$d^k f(a)(h^1, h^2, \dots, h^k) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{N} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\, h^1_{i_1} h^2_{i_2} \dots h^k_{i_k} \quad (\text{pro } f \in C^k(\mathcal{U}_\delta(a)))$$

<u>Rovnice ve tvaru TD</u> : Zápis : $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Řešení : Najdeme $U(x,y)$ t.ž. $dU(x,y)(h_1,h_2) = M(x,y)h_1 + N(x,y)h_2$

Jinými slovy hledáme potenciál $U(x,y)$ vektorového pole $(M(x,y), N(x,y))$.

Řešení je pak dáno implicitním vztahem $U(x,y) = C$, kde $C \in \mathbb{R}$.

Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ve tvaru $(a,b) \times (c,d)$, pak (M,N) má potenciál, pokud $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

To nemusí být vždy splněno, ale můžeme hledat integrační faktor $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, že $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ a následně hledat potenciál k vektorovému poli $(\mu M, \mu N)$

Je-li $M(x,y) \neq 0$, pak vztah $U(x,y) = C$ dává řešení rovnice $M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0$, kde $x(y)$ je hledaná funkce.

Podobně, je-li $N(x,y) \neq 0$, pak vztah $U(x,y) = C$ dává řešení rovnice $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$, kde $y(x)$ je hledaná funkce

1) $f(x,y) = \ln(x+y)$.

Už víme: $D_f = \{(x,y) : x+y>0\}$ a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$

Kandidát na TD: $df(x,y)(h_1,h_2) = \frac{h_1}{x+y} + \frac{h_2}{x+y} = \frac{h_1+h_2}{x+y}$

Tedy $df(x,y)$ je zobrazení, které vektoru $h=(h_1,h_2)$ přiřadí číslo $\frac{h_1+h_2}{x+y}$

Protože parciální derivace jsou spojité, skutečně jde o TD.

Můžeme to dokázat i z definice: $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+y+h_1+h_2) - \ln(x+y) - \frac{h_1+h_2}{x+y}}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h_1+h_2}{x+y}\right) - \frac{h_1+h_2}{x+y}}{\|h\|}$

a protože $h\to 0$, tak $\frac{h_1+h_2}{x+y}$ je malé, z Taylora je čitatel roven $-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h_1+h_2}{x+y}\right)^2 + o\left(\left(\frac{h_1+h_2}{x+y}\right)^2\right)$

zatímco jmenovatel $\|h\| \sim \frac{h_1+h_2}{x+y}$ pro pevné x,y. Limita se proto rovná nule.

---

2) $f(x,y) = \cos x \cosh y$

Už víme: $D_f = \mathbb{R}^2$ a $\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \cosh y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \sinh y$

Kandidát na TD: $df(x,y)(h_1,h_2) = -h_1 \sin x \cosh y + h_2 \cos x \sinh y$.

Jde o TD, protože jsou parc. derivace spojité, opět bychom mohli dokázat pomocí Taylora.

$\cos(x+h_1)\cdot\cosh(y+h_2) = \left[\cos x - h_1 \sin x - \frac{h_1^2}{2}\cos x + o(h_1^2)\right]\cdot\left[\cosh y + h_2 \sinh y + \frac{h_2^2}{2}\cosh y + o(h_2^2)\right]$

a proto $f(x+h_1,y+h_2) - f(x,y) - df(x,y)(h_1,h_2)$ obsahuje jen kvadratické a vyšší členy v h.

---

3) $f(x,y) = |x|\cdot|y|$

Už víme: $D_f = \mathbb{R}^2$, mimo osy $\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sgn} x\cdot|y|$, $\frac{\partial f}{\partial y} = |x|\cdot\operatorname{sgn} y$,

na osách mimo počátek neexistuje jedna nebo druhá derivace

v počátku je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Mimo osy je TD dán předpisem $df(x,y)(h_1,h_2) = \operatorname{sgn} x\cdot|y|\cdot h_1 + |x|\cdot\operatorname{sgn} y\cdot h_2$, opět ze spojitosti, dokázali bychom snadno.

Na osách mimo počátek TD existovat nemůže.

Počátek: Kandidát na TD je $df(0,0)(h_1,h_2) = 0$. Musíme ověřit z definice

$f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - df(0,0)(h_1,h_2) = |h_1|\cdot|h_2|$ a ptáme se, zda $\lim_{h\to 0} \frac{|h_1||h_2|}{\|h\|} = 0$?

Zvolme $\|h\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2} = r$, $|h_1| = r\cdot|\cos\varphi|$, $|h_2| = r\cdot|\sin\varphi|$ a potom $\lim_{r\to 0} \frac{r^2|\cos\varphi||\sin\varphi|}{r} = \lim_{r\to 0} r\cdot|\cos\varphi|\cdot|\sin\varphi| = 0$,

protože jde o limitu "$0\cdot$ omezená"

4) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$

Už víme: $D_f = \mathbb{R}^2$, mimo osy: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{1/3}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} x^{1/3} y^{-2/3}$

na osách mimo počátek neexistuje jedna nebo druhá

v počátku $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Mimo ~~osy~~ osy: ze spojitosti parc. derivací je TD $df(x,y)(h_1,h_2) = \frac{1}{3}\left(x^{-2/3} y^{1/3} h_1 + x^{1/3} y^{-2/3} h_2\right)$

V počátku je kandidát $df(0,0)(h_1,h_2) = 0$

Z definice: $f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - df(0,0)(h_1,h_2) = h_1^{1/3} h_2^{1/3}$ a zkoumáme $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h_1^{1/3} h_2^{1/3}}{\|h\|}$

Ta ale neexistuje: $\left.\begin{array}{l} h_1 = r\cos\varphi \\ h_2 = r\sin\varphi \\ \|h\| = r \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{r \to 0} \frac{1}{r^{1/3}} \cdot \cos^{1/3}\varphi \, \sin^{1/3}\varphi$ neexistuje

V počátku neexistuje TD, stejně tak na osách.

---

5) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$

Už víme: $D_f = \mathbb{R}^2$, mimo počátek $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4}{\sqrt[5]{x^5+y^5}}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^4}{\sqrt[5]{x^5+y^5}}$

Také mimo body x = -y, kde derivace neexistují!

v počátku $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1$

Mimo počátek je ze spojitosti parc. derivací TD $df(x,y)(h_1,h_2) = \frac{h_1 x^4 + h_2 y^4}{\sqrt[5]{x^5+y^5}}$

V počátku je kandidát $df(0,0)(h_1,h_2) = h_1 + h_2$

Máme $f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - df(0,0)(h_1,h_2) = \sqrt[5]{h_1^5 + h_2^5} - h_1 - h_2$ a zajímá nás limita

$\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt[5]{h_1^5+h_2^5} - h_1 - h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$. Na osách $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ má tento výraz hodnotu nula, ale pro $h_1 = h_2$ je $\frac{\sqrt[5]{2h_1^5} - 2h_1}{\sqrt{2h_1^2}} = \frac{\sqrt[5]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0$

Limita tak neexistuje a tedy TD v počátku neexistuje.

---

6) $f(x,y,z) = x^{y/z}$

Už víme: $D_f = \{(x,y,z) : x > 0,\ z \neq 0\}$ a máme spočítané parc. derivace, které jsou spojité na obou souvislých částech def. oboru. Proto tam existuje totální diferenciál a je dán jako

$$df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = x^{y/z - 1} \cdot \left(\frac{y}{z} h_1 + \frac{x \ln x}{z} h_2 - \frac{xy \ln x}{z^2} h_3 \right)$$

7) $f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2+y^2}$

Už víme že potřebujeme : $\alpha > 0$, abychom mohli v počátku spojitě dodefinovat nulou

: $\alpha > 1/2$, abychom měli existenci parciálních derivací v počátku

Bez parciálních derivací nemůže existovat TD, takže zkoumejme případ $\alpha > 1/2$, kdy máme $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Kandidát na TD je tak $df(0,0)(h_1,h_2) = 0$.

Ověříme z definice : $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{(h_1^2+h_2^2)^\alpha \sin \frac{1}{h_1^2+h_2^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} (h_1^2+h_2^2)^{\alpha-1/2} \cdot \sin \frac{1}{h_1^2+h_2^2} = 0$

podle věty "0 · omezená" pro libovolné $\alpha > 1/2$

---

8) $f(x,y,z)$, kde $x = u^2+v^2$, $y = u^2-v^2$, $z = 2uv$.

Máme tedy zobrazení $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ takové, že $g(u,v) = (u^2+v^2, u^2-v^2, 2uv)$

a zajímá nás totální diferenciál složeného zobrazení $f(g(u,v)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Nejprve najdeme totální diferenciály jednotlivých složek zobrazení $g(u,v)$

$$dg(u,v)(h_1,h_2) = (2uh_1 + 2vh_2,\ 2uh_1 - 2vh_2,\ 2vh_1 + 2uh_2)$$

Totální diferenciál funkce f je $df(x,y,z)(k_1,k_2,k_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)k_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)k_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)k_3$

Nyní stačí za k_1,k_2,k_3 dosadit složky diferenciálu $dg(u,v)$ a jsme hotovi

$$df(g(u,v))(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(2uh_1+2vh_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2uh_1-2vh_2) + \frac{\partial f}{\partial z}(2vh_1+2uh_2)$$

$$= 2h_1\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}u + \frac{\partial f}{\partial z}v\right) + 2h_2\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}v - \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}u\right)$$

Stejný vztah bychom dostali prostým použitím řetízkového pravidla, protože

$\frac{\partial f(g(u,v))}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$ a to je přesně totéž, co nám násobí h_1 ve výsledku.

---

9) $g(t,u) = f(f(u,t), f(t,u))$ Vnitřní funkce : $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $X(t,u) = (\underbrace{f(u,t)}_{x_1}, \underbrace{f(t,u)}_{x_2})$

$g(t,u) = f(X(t,u))$. Dle řetízkového pravidla: $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial t}$

Vidíme, že $\frac{\partial X_1}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_2}$ a $\frac{\partial X_2}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, odtud už $\frac{\partial g}{\partial t}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(f(1,1), f(1,1))\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(f(1,1), f(1,1))\cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)$

$= 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = \underline{\underline{4}}$

Lze ověřit např. pro $f(x,y) = xy^2$ a potom $g(x,y) = yx^2\cdot(xy^2)^2 = x^4y^5$

10) $f(x,y,z) = xyz$

Potřebujeme parc. derivace třetího řádu, smíšené jsou záměnné

$\frac{\partial f}{\partial x} = yz$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz$ $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$ a $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0$ a $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0$ a $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$ a $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 0$

$d^3 f$ je trilineární zobrazení, třem vektorům $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$, $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ přiřadí číslo

$d^3 f(xyz)(\vec{h}, \vec{k}, \vec{l}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \cdot h_1 k_1 l_1 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \cdot (h_1 k_1 l_2 + h_1 k_2 l_1 + h_2 k_1 l_1) \ldots$ atd.

Jediná nenulová derivace je $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ a tu můžeme dostat šesti permutacemi: xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx

Proto $d^3 f(x,y,z)(\vec{h}, \vec{k}, \vec{l}) = h_1 k_2 l_3 + h_1 k_3 l_2 + h_2 k_1 l_3 + h_2 k_3 l_1 + h_3 k_1 l_2 + h_3 k_2 l_1$

---

11) Budeme používat $f(a+h) \approx f(a) + df(a) \cdot h$

a) $f(x,y,z) = x^2 y^3 z^3$ $\quad h = (0{,}02; 0{,}003; 0{,}004)$ $\quad a = (1,2,3)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3z^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2z^3$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2y^3z^2$

$df(a)(h) = 432 \cdot h_1 + 324 \cdot h_2 + 216 \cdot h_3$

$f(a+h) \approx 216 + 432 \cdot 0{,}02 + 324 \cdot 0{,}003 + 216 \cdot 0{,}004 = 226{,}476$

Kalkulačka dá výsledek: 226,643

b) $f(x,y) = \sin x \operatorname{tg} y$ $\quad a = (\pi/6, \pi/4)$ $\quad h = (-\pi/180, \pi/180)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \operatorname{tg} y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 y}$

$df(a)(h) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} h_1 + h_2$

$f(a+h) \approx \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) + \frac{\pi}{180} \doteq 0{,}50234$

Kalkulačka dá: 0,50204

12) $2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy = 0$ Máme $M(x,y) = 2xy$
$N(x,y) = x^2-y^2$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$ a proto rovnice je ve tvaru TD

Potenciál $U(x,y)$ hledáme tak, že najdeme primitivní fci k M:

$U(x,y) = \int 2xy\,dx = x^2y + C$. Integrovali jsme v proměnné x. Konstanta C je tak konstanta jen pro proměnnou x, ne pro y. Proto C je jakákoli funkce v proměnné y !

$U(x,y) = x^2y + C(y) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + C'(y) = x^2-y^2$. Odtud $C'(y) = -y^2$ a
$C(y) = \int -y^2\,dy = -\frac{y^3}{3}$

$U(x,y) = x^2y - y^3/3$. Řešení rovnice je dáno implicitně jako $U(x,y) = C$

Mimo souřadné osy je vztahem $U(x,y)=C$ určeno řešení rovnice $2xy\frac{dx}{dy} + (x^2-y^2) = 0$
a mimo kříž $|x| = |y|$ je tímto vztahem určeno řešení rovnice $2xy + (x^2-y^2)\frac{dy}{dx} = 0$.

---

13) $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$ Tedy $M(x,y) = e^{-y}$ a $N(x,y) = -2y - xe^{-y}$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ rovnice je ve tvaru TD

$U(x,y) = \int e^{-y}\,dx = xe^{-y} + C(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = -xe^{-y} + C'(y) = -xe^{-y} - 2y \Rightarrow C'(y) = -2y \Rightarrow C(y) = -y^2$

$\Rightarrow U(x,y) = xe^{-y} - y^2 = C$ je řešení příslušné rovnice, zde $e^{-y}\frac{dx}{dy} - (2y + xe^{-y}) = 0$

Můžeme přímo vyjádřit $x = e^{y}(C + y^2)$, tj. $x = x(y)$.

---

14) $\frac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}\,dy = 0$. Tedy $M(x,y) = \frac{3x^2+y^2}{y^2}$ a $N(x,y) = \frac{-2x^3-5y}{y^3}$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x^2}{y^3} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ rovnice je ve tvaru TD

$U(x,y) = \int\left(\frac{3x^2}{y^2} + 1\right)dx = \frac{x^3}{y^2} + x + C(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-2x^3}{y^3} + C'(y) = \frac{-2x^3}{y^3} - \frac{5}{y^2} \Rightarrow C'(y) = -\frac{5}{y^2} \Rightarrow C(y) = \frac{5}{y}$

$U(x,y) = \frac{x^3}{y^2} + x + \frac{5}{y} = C$ je řešení příslušné rovnice, zde $\left(3\frac{x^2}{y^2} + 1\right)\frac{dx}{dy} - \frac{2x^3}{y^3} - \frac{5}{y^2} = 0$

na $y > 0$ a $y < 0$.

15) $(x^2+y)\,dx - x\,dy = 0 \qquad \mu = \mu(x)$

Máme $N(x,y) = -x$ a $M(x,y) = x^2+y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1 \Rightarrow$ rovnice opravdu není ve tvaru TD

Hledáme $\mu = \mu(x)$ tak, že $\frac{\partial}{\partial y}\big(M(x,y)\mu(x)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(N(x,y)\mu(x)\big)$

$\frac{\partial}{\partial y}\big((x^2+y)\mu(x)\big) = \mu(x)$. $\qquad \frac{\partial}{\partial x}\big(-x\mu(x)\big) = -\mu(x) - x\mu'(x)$

Tedy $\mu = -\mu - x\mu'$, tj. $x\mu' = -2\mu$ ... rovnice se separ. prom.

$$\ln|\mu| = \int \frac{d\mu}{\mu} = -\int \frac{2\,dx}{x} = -2\ln|x| + C \text{ ... konstanta nás nezajímá}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{x^2}} \qquad x \neq 0$$

Nová rovnice: $\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0 \qquad \tilde{M}(x,y) = 1+\frac{y}{x^2} \qquad \tilde{N}(x,y) = -\frac{1}{x}$

$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ ... nová rovnice je ve tvaru TD

$U(x,y) = \int \left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx = x - \frac{y}{x} + C(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x} + C'(y) = -\frac{1}{x} \Rightarrow C'(y) = 0 \to C(y) = C$

$U(x,y) = x - \frac{y}{x} = C$ je implicitně zadané řešení rovnice $-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1+\frac{y}{x^2}\right) = 0$ pro $x \neq 0$

Lze přímo vyjádřit $y = x(x-C)$, nemá problém v nule, původní rovnice je $-x\frac{dy}{dx} + (x^2+y) = 0$, lze v nule lepit a mít řešení na $\mathbb{R}$.

---

16) $(xy^2+y)\,dx - x\,dy = 0$, $\mu = \mu(y)$.

Máme $M = xy^2+y$, $N = -x$. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy+1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1 \Rightarrow$ rovnice není ve tvaru TD

Chceme $\frac{\partial}{\partial y}(M\mu(y)) = \frac{\partial}{\partial x}(N\mu(y))$, tedy $(2xy+1)\mu(y) + (xy^2+y)\mu'(y) = -\mu(y)$

$$(xy^2+y)\mu'(y) = -2(xy+1)\mu(y).$$

Pro $xy+1 \neq 0$: $\quad y\mu' = -2\mu$ a podobně jako v předchozím příkladě $\boxed{\mu(y) = \frac{1}{y^2}}$ $\quad y \neq 0$

Nová rovnice: $\left(x+\frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$: $\tilde{M} = x+\frac{1}{y}$ $\quad \tilde{N} = -\frac{x}{y^2}$: $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ ... tvar TD

$U(x,y) = \int \left(x+\frac{1}{y}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + C(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + C'(y) = -\frac{x}{y^2} \to C'(y) = 0 \Rightarrow$ Řešení je dáno jako $U(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C$

Můžeme vyjádřit explicitně $y = \frac{x}{C - \frac{x^2}{2}}$ jako řešení rovnice $-x\frac{dy}{dx} + (xy^2 + y) = 0$ na intervalech, kde je jmenovatel nenulový, v nule lze spojovat.

---

17) $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3)dy = 0$, $\mu = \mu(x+y)$

Není ve tvaru TD.

Chceme $\frac{\partial}{\partial y}(M\mu) = \frac{\partial}{\partial x}(N\mu)$

tedy $\frac{\partial M}{\partial y}\cdot\mu + M\cdot\mu' = \frac{\partial N}{\partial x}\cdot\mu + N\cdot\mu'$

$M(x,y) = x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3$ | $N(x,y) = y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3$

$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 + 2x - 2y - 3y^2$ | $\frac{\partial N}{\partial x} = y^2 + 2y - 2x - 3x^2$

$$(x^2+2x-2y-3y^2)\cdot\mu + (x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3)\cdot\mu' = (y^2+2y-2x-3x^2)\mu + (y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3)\cdot\mu'$$

$$(4x^2+4x-4y-4y^2)\cdot\mu = (y^3+2y^2+xy^2-x^2y-2x^2-x^3)\cdot\mu'$$

$$4\cdot(x-y)(1+x+y)\cdot\mu = (y-x)\cdot\left[(y^2+xy+x^2)+2(y+x)+xy\right]\cdot\mu' \qquad t = x+y$$

$$-4\cdot(1+t)\cdot\mu(t) = (t^2+2t)\mu'(t)$$

Odtud $\ln|\mu| = \int\frac{d\mu}{\mu} = -4\int\frac{1+t}{t^2+2t}dt = -2\ln|t^2+2t| \Rightarrow \mu(t) = \frac{1}{t^2\cdot(t+2)^2}$

a tedy $\boxed{\mu(x+y) = \frac{1}{(x+y)^2(x+y+2)^2}}$

Nová rovnice má $\tilde{M}(x,y) = \frac{x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3}{(x+y)^2(x+y+2)^2}$

a $\tilde{N}(x,y) = \frac{y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3}{(x+y)^2(x+y+2)^2}$

$$U(x,y) = \int\frac{x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3}{(x+y)^2(x+y+2)^2}dx = \int\frac{x^2(1+y)+2xy-y^2-y^3}{(x+y)^2(x+y+2)^2}dx =$$

| ROZKLAD NA PARC. ZLOMKY $\frac{A(y)}{x+y} + \frac{B(y)}{(x+y)^2} + \frac{C(y)}{x+y+2} + \frac{D(y)}{(x+y+2)^2}$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{y^2+2y+2}{(x+y+2)^2}dx - \frac{1}{2}\int\frac{y^2}{(x+y)^2}dx = -\frac{y^2+2y+2}{2(x+y+2)} + \frac{y^2}{2\cdot(x+y)} + C(y) = \frac{xy^2+y^3+2y^2-xy^2-y^3-2xy-2y^2-2x-2y}{2\cdot(x+y)(x+y+2)} + C$$

$$= -\frac{xy+x+y}{(x+y)(x+y+2)} + C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{(-x-1)\cdot(x+y)(x+y+2)+(xy+x+y)\cdot(2x+2y+2)}{(x+y)^2(x+y+2)^2} + C'(y) = \frac{2\cdot[x^2y+xy^2+xy+x^2+xy+x+xy+y^2+y]-[x^2+xy+x+y]\cdot[x+y+2]}{(x+y)^2(x+y+2)^2}$$

$$= \frac{y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3}{(x+y)^2(x+y+2)^2} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0.$$ Řešení rovnice je $U(x,y) = \frac{-xy-x-y}{(x+y)(x+y+2)} = C$

18) $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$. $\mu = \mu(xy)$. Vidíme, že $y=0$ je řešení.

Přepíšeme do "TD" tvaru: $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0$

$M(x,y) = x^2y^3 + y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 + 1$

$N(x,y) = x^3y^2 - x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2 - 1$

Chceme: $\frac{\partial}{\partial y}(M\mu) = \frac{\partial}{\partial x}(N\mu)$, kde $\mu = \mu(xy)$

Proto $\frac{\partial}{\partial y}\mu(xy) = \mu'(xy)\cdot x$ a $\frac{\partial}{\partial x}\mu(xy) = \mu'(xy)\cdot y$

Odtud $\frac{\partial M}{\partial y}\mu + M\cdot x\cdot\mu' = \frac{\partial N}{\partial x}\mu + N\cdot y\cdot\mu'$

$$(3x^2y^2+1)\mu + (x^3y^3 + xy)\mu' = (3x^2y^2 - 1)\mu + (x^3y^3 - xy)\mu' \qquad t = xy$$

$$2t\mu' = -2\mu$$

$$\ln\mu = \int\frac{d\mu}{\mu} = -\int\frac{dt}{t} = \ln\frac{1}{t} \quad\rightarrow\quad \boxed{\mu(xy) = \frac{1}{xy}}$$

Nová rovnice

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

$$U(x,y) = \int xy^2 + \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2y^2 + \ln|x| + C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + C'(y) = x^2y - \frac{1}{y} \rightarrow C'(y) = -\frac{1}{y}, \quad C(y) = -\ln|y|$$

$U(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C$ je implicitně zadané řešení původní rovnice mimo bod $x=0$