Sada příkladů 2/10

# Funkce více proměnných

## Parciální derivace

V následujících příkladech zjistěte, kde jsou funkce definované, spojité, kde mají parciální derivace 1. řádu a kde jsou spojité 1. parciální derivace

1. $f(x, y) = \ln(x + y)$
2. $f(x, y, z) = \cos x \cosh y$
3. $f(x, y) = |x||y|$
4. $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$
5. $f(x, y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$
6. $f(x, y, x) = x^{\frac{y}{z}}$.
7. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro jaké hodnoty $\alpha$ bude mít funkce

   $$f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

   parciální derivace 1. řádu v bodě $(0, 0)$?

   Spočtěte parciální derivace 2. řádu a zjistěte, zda jsou záměnné

8. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$
9. $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$
10. $f(x, y) = x \sin(x + y)$
11. $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}$
12. $f(x, y, z) = x^{y^z}$
13. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$

14. $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ (Uvažujte bod (0,0).)

15. Spočtěte derivaci funkce $x^2 - y^2$ v bodě (1,1) ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy $x$ úhel $\frac{\pi}{3}$.

16. Najděte jednotkový vektor, v jehož směru má derivace $x^2 - xy + y^2$ v bodě (1,1) největší, nejmenší a nulovou hodnotu.

17. Spočtěte $\frac{\partial F}{\partial u}$, kde $F = f(g)$, $f(x,y,z)$ je daná funkce a $g_1(u,v) = (u^2-1)/2v$, $g_2(u,v) = (u+v)/(u-v)$, $g_3(u,v) = u^2 - v^2$.

18. Nechť $f(s,t)$ je hladká nezáporná funkce na $\mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace 1. řádu funkce $g(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$ pomocí hodnot $f$ a jejich parciálních derivací.

# PARCIÁLNÍ DERIVACE



Pro přehlednost definice pro fci 3 proměnných, jiný počet je samozřejmě analogicky.
Nechť tedy $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, značíme $f(x,y,z)$
Nechť $a \in \mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3)$. Nechť $f$ je definovaná na $\{a_1\} \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \times \{a_3\}$ pro nějaké $\delta > 0$. Pak

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h, a_3) - f(a)}{h}}$$

analogicky derivace podle jiných proměnných.

Vyšší derivace: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$ značíme zkráceně $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$ značíme zkráceně $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$

Platí aritmetika derivací, jak ji známe z fcí jedné proměnné

Derivace ve směru: $v \in \mathbb{R}^3$. $\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}}$

(parciální derivace jsou derivace ve směru vektorů kanonické báze)

Gradient: $\boxed{\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial f}{\partial z}(a)\right)}$

Jsou-li na okolí nějakého bodu parciální derivace spojité, pak v tomto bodě existuje totální diferenciál [o tom příště], a díky tomu existují derivace ve všech směrech a platí $\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v}$

Řetízkové pravidlo pro derivování složené funkce: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ má v bodě $a$ spojité parc. derivace, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ má v bodě $f(a)$ také spojité parc. derivace.

Pak např. $$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial y}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial y}(a)$$

Zde $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ má $m$ složek, každá z nich je funkcí proměnných $x, y, z$

$g$ je reálná funkce, ale závisí na $m$ proměnných, které značíme $x_1, x_2, \dots, x_m$

Má-li fce $f$ spojité derivace $n$-tého řádu na okolí nějakého bodu, pak jsou smíšené derivace $n$-tého řádu v tomto bodě záměnné, tj. např. $f \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

1) $f(x,y) = \ln(x+y)$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0\}$. $f$ je spojitá na $D_f$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$ ... Obě jsou definované a spojité na celém $D_f$

---

2) $f(x,y) = \cos x \cdot \cosh y$

$D_f = \mathbb{R}^2$, $f$ je spojitá na $D_f$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \cosh y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \sinh y$ ... Obě jsou definované a spojité na celém $D_f$

[Pokud by zadání bylo napsáno správně jako $f(x,y,z)$, pak $D_f = \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, zbytek stejný]

---

3) $f(x,y) = |x| \cdot |y|$

$D_f = \mathbb{R}^2$, $f$ je spojitá na $D_f$

Pro body $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ máme $\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sgn} x \cdot |y|$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = |x| \cdot \operatorname{sgn} y$

Pro $x = 0 \wedge y \neq 0$: $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, protože $f(x,y) = 0$ na $y$-ovém okolí bodu $(0,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ neexistuje, protože $f(x,y) = -x \cdot |y|$ na levém $x$-ovém okolí bodu $(0,y)$ a $f(x,y) = x \cdot |y|$ na pravém $x$-ovém okolí

Podobně pro $x \neq 0 \wedge y = 0$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ neexistuje

Pro bod $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, protože $f(x,y) = 0$ na obou osách

$\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá na levé polorovině a pravé polorovině (tj. na $\{x>0\}$ a $\{x<0\}$)

$\frac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá na horní polorovině a dolní polorovině (tj. na $\{y>0\}$ a $\{y<0\}$)

Obě dvě derivace jsou navíc spojité i v počátku, což ověříme z definice - pro dané epsilon > 0 najdeme dostatečně malé prstencové okolí počátku, na kterém jsou hodnoty parciálních derivací v absolutní hodnotě menší než epsilon (bereme v úvahu jen body, ve kterých jsou parciální derivace definované).

---

4) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$

$D_f = \mathbb{R}^2$, $f$ je spojitá na $D_f$

Pro $x \neq 0, y \neq 0$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \cdot y^{1/3}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} x^{1/3} y^{-2/3}$

Pro $x = 0, y \neq 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}$ neexistuje (je nekonečná, ale to v definici nepřipouštíme)

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, protože $f(x,y)$ je nulová na ose $y$.

Podobně $x \neq 0, y = 0$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ neexistuje

Pro bod $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, protože $f(x,y) = 0$ na obou osách

Tentokrát parciální derivace v počátku spojité nejsou, opět z definice. Na libovolně malém prstencovém okolí počátku najdeme body, ve kterých jsou hodnoty parciální derivace libovolně velké, například v případě de f/ de x dostaneme libovolně velkou hodnotu derivace přiblížením se x k nule s pevným y daným poloměrem uvažovaného prstencového okolí.

Stejně jako v 3: $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá na $\{x>0\}$ a $\{x<0\}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá na $\{y>0\}$ a $\{y<0\}$.

Parciální derivace nejsou definovány rovněž v bodech, které splňují x^5+y^5 = 0, což jsou body x = -y.
V takových bodech jsou hodnoty nekonečné, ty však v definici nepřipouštíme.

V těchto bodech pak samozřejmě parciální derivace nemohou být ani spojité, jsou tak spojité na dvou souvislých částech svých definičních oborů, a to
{(x,y) v R^2: x+y > 0}
a
{(x,y) v R^2: x+y < 0}

5) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5+y^5}$

$D_f = \mathbb{R}^2$, $f$ je spojitá na celém $D_f$

Mimo bod $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{5}\cdot(x^5+y^5)^{-4/5}\cdot 5\cdot x^4 = \frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5+y^5)^4}}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{5}\cdot(x^5+y^5)^{-4/5}\cdot 5y^4 = \frac{y^4}{\sqrt[5]{(x^5+y^5)^4}}$$

V počátku: $g(x) = f(x,0) = x$. Proto $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = g'(0) = 1$

$h(y) = f(0,y) = y$. Proto $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = h'(0) = 1$

Obě parciální derivace jsou spojité všude mimo počátek. V počátku není spojitá žádná z nich, protože na libovolném okolí počátku jsou body, kde je jedna či druhá nulová (na osách)

---

6) $f(x,y,z) = x^{y/z}$

$D_f = \{(x,y,z) : x>0, z\neq 0\}$ $f$ je spojitá na dvou souvislých částech svého def. oboru

Platí $x^{y/z} = \exp\left(\frac{y}{z}\cdot\ln x\right)$

Proto $\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left(\frac{y}{z}\cdot\ln x\right)\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{x} = x^{y/z}\cdot y/z\cdot\frac{1}{x} = \frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left(\frac{y}{z}\cdot\ln x\right)\cdot\frac{1}{z}\cdot\ln x = x^{y/z}\cdot\frac{\ln x}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \exp\left(\frac{y}{z}\cdot\ln x\right)\cdot y\cdot\ln x\cdot(-1)\cdot\frac{1}{z^2} = -x^{y/z}\cdot\frac{y\cdot\ln x}{z^2}$$

Všechny jsou spojité na souvislých částech def. oboru

Výraz $x^{y/z}$ dává smysl také pro $x=0$ a nebo dokonce $x<0$, pokud $y/z\in\mathbb{Q}$ a $y,z$ má správnou paritu

V takovém případě nelze derivovat podle $y$ a $z$, jen podle $x$ a platí tam vztah $\frac{\partial f}{\partial x}$ jako výše.

---

7) $f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \sin\frac{1}{x^2+y^2}$

Nejprve potřebujeme $f(x,y)$ spojitě dodefinovat v počátku. $\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ nemá v počátku limitu, ale je omezená, takže pro $\alpha>0$ můžeme použít "0. omezená" k tomu, abychom ukázali, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Dále z definice: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2\alpha}\sin\frac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{2\alpha-1}\sin\frac{1}{h^2} = 0$ pro $\alpha > 1/2$

a tato limita neexistuje pro $\alpha\leq 1/2$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ pro $\alpha > 1/2$ úplně stejně.

8) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

$D_f = \mathbb{R}^2$, má spojité derivace všech řádů na celém $D_f$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$

Vidíme, že $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ všude

---

9) $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, na $D_f$ spojité všechny derivace všech řádů

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2\frac{x}{y^3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 \cdot \frac{1}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \cdot \frac{1}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6\frac{x}{y^4}$. Vidíme, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ na $D_f$.

---

10) $f(x,y) = x \sin(x+y)$

$D_f = \mathbb{R}^2$, na $D_f$ jsou spojité všechny derivace všech řádů

$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x+y) + x\cos(x+y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(x+y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos(x+y) + \cos(x+y) - x\sin(x+y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(x+y) - x\sin(x+y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x+y) - x\sin(x+y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\sin(x+y)$.

Vidíme, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ všude.

---

11) $f(x,y) = \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$

$D_f = \{(x,y) : y \neq 0,\ \frac{x^2}{y} \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Na $D_f$ opět vše spojité

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}} \cdot 2 \cdot \frac{x}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}} \cdot (-1) \cdot \frac{x^2}{y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 \cdot \frac{1}{\cos^3\frac{x^2}{y}} \cdot \left(-\sin\frac{x^2}{y}\right) \cdot 2\frac{x^2}{y^2} + \frac{2}{y} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4 \cdot \frac{1}{\cos^3\frac{x^2}{y}} \cdot \left(-\sin\frac{x^2}{y}\right) \cdot (-1)\frac{x^3}{y^3} - 2 \cdot \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \cdot \frac{1}{\cos^3\frac{x^2}{y}} \cdot \left(-\sin\frac{x^2}{y}\right) \cdot 2\frac{x^3}{y^3} - \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}} \cdot \frac{2x}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{1}{\cos^3\frac{x^2}{y^2}} \left(-\sin\frac{x^2}{y}\right) \cdot (-1)\frac{x^4}{y^4} + 2\frac{x^2}{y^3} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{y}}$

Vidíme, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ na celém $D_f$.

12) $f(x,y,z) = x^{y^z}$ (5)

$D_f = \{(x,y,z) : x>0, y>0\}$. Na $D_f$ je vše spojité

Budeme používat $f(x,y,z) = x^{y^z} = \exp(y^z \ln x) = \exp(\ln x \cdot \exp(z \ln y))$

$\frac{\partial f}{\partial x} = x^{y^z} \cdot \frac{y^z}{x} = y^z \cdot x^{y^z - 1}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} \cdot \ln x \, y^z \cdot \frac{z}{y} = \ln x \, z \, x^{y^z} y^{z-1}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} \cdot \ln x \, y^z \cdot \ln y = \ln x \ln y \, x^{y^z} y^z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^z \cdot (y^z - 1) \cdot x^{y^z - 2}$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z y^{z-1} \cdot x^{y^z-1} + y^z \cdot x^{y^z-1} \cdot \ln x \cdot z \cdot y^{z-1} = x^{y^z-1} \cdot y^{z-1} \cdot z \cdot [1 + \ln x \, y^z]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y^z \ln y \, x^{y^z-1} + y^z \cdot x^{y^z-1} \cdot \ln x \cdot y^z \cdot \ln y = x^{y^z-1} \cdot y^z \cdot \ln y \cdot [1 + \ln x \, y^z]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z x^{y^z-1} y^{z-1} + \ln x \, z y^{z-1} y^z x^{y^z-1} = x^{y^z-1} y^{z-1} \cdot z [1 + \ln x \, y^z]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ln x \, z \left[\ln x \, z \, x^{y^z} y^{z-1} \cdot y^{z-1} + x^{y^z} \cdot (z-1) y^{z-2}\right] = x^{y^z} \ln x \, z \, y^{z-2} [z - 1 + \ln x \, z \, y^z]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \ln x \cdot [x^{y^z} y^{z-1} + z \cdot x^{y^z} y^z \ln x \ln y \, y^{z-1} + z x^{y^z} \cdot y^{z-1} \cdot \ln y] = \ln x \, x^{y^z} y^{z-1} \cdot [1 + z \ln x \ln y \, y^z + z \ln y]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \ln y \, y^z \cdot [x^{y^z-1} + \ln x \cdot y^z \cdot x^{y^z-1}] = x^{y^z-1} y^z \ln y [1 + \ln x \, y^z]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \ln x \cdot [x^{y^z} \cdot y^{z-1} + \ln y \cdot y^z \cdot \ln x \, z \, x^{y^z} y^{z-1} + \ln y \, x^{y^z} \cdot z y^{z-1}] = \ln x \, x^{y^z} y^{z-1} \cdot [1 + z \ln x \ln y \, y^z + z \ln y]$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \ln x \ln y [\ln x \ln y \, x^{y^z} y^z y^z + x^{y^z} y^z \ln y] = \ln x \ln^2 y \, x^{y^z} y^z \cdot [1 + \ln x \, y^z]$

Vidíme, že smíšené derivace jsou záměnné.

---

13) DÚ

---

14) $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$

$= 0$ pro $(x,y) = (0,0)$

Problém je jen v počátku.

Mimo počátek: $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + x \cdot \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot [x^4 - y^4 + 4x^2y^2]$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y \cdot \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{x}{(x^2+y^2)^2} [x^4 - y^4 - 4x^2y^2]$

V počátku z definice: $f(x,y) = 0$ na osách a proto $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ je na ose $x$ (tj. $y=0$) nulová, stejně $\frac{\partial f}{\partial y}$ na ose $y$, takže $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$.

Pro spočítání $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ musíme vzít fci $\frac{\partial f}{\partial x}$ na ose $y$ (tj. pro $x=0$). $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{y}{y^4} \cdot (-y^4) = -y$

Víme $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, takže z definice $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{-h + 0}{h} = -1$.

Analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}$ na ose $x$ (tj. pro $y=0$): $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{x}{x^4}\cdot x^4 = x$ , $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

a proto z definice $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h+0}{h} = 1.$

Vidíme, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ !

---

15) Funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ je polynom, má tak všude spojité všechny ~~Ta~~ derivace a platí vzoreček $\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$

V našem případě $v = (\cos \pi/3, \sin \pi/3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ , $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \Rightarrow \nabla f(1,1) = (2,-2)$ a $\frac{\partial f}{\partial v} = (2,-2)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{1-\sqrt{3}}}$

---

16) DÚ

---

17) Máme $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ , $g = (g_1, g_2, g_3)$ , $F = f(g)$

Podle řetízkového pravidla $\frac{\partial F}{\partial u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g_i}{\partial u}$

$g_1(u,v) = \frac{u^2-1}{2v} \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial u} = \frac{u}{v}$

$g_2(u,v) = \frac{u+v}{u-v} \Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial u} = \frac{u-v-(u+v)}{(u-v)^2} = \frac{-2v}{(u-v)^2}$

$g_3(u,v) = u^2 - v^2 \Rightarrow \frac{\partial g_3}{\partial u} = 2u$

Odtud už $\underline{\underline{\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{2v}{(u-v)^2}\frac{\partial f}{\partial y} + 2u\frac{\partial f}{\partial z}}}$

---

18) $g(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)} = \exp\left(f(y,x)\cdot \ln f(x,y)\right)$

Zavedeme zobrazení $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tak, že $S(x,y) = (s(x,y), t(x,y))$, kde $s(x,y) = y$, $t(x,y) = x$.

Potom $g(x,y) = \exp\left(f(S(x,y))\cdot \ln f(x,y)\right)$ a na derivování $f(S)$ použijeme řetízkové pravidlo.

Označme ještě $h(x,y) = f(S(x,y))$ a spočítáme parciální derivace:

$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 0\cdot\frac{\partial f}{\partial s} + 1\cdot\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$ a $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = 1\cdot\frac{\partial f}{\partial s} + 0\cdot\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s}$

$\frac{\partial g}{\partial x} = f(x,y)^{f(y,x)}\cdot\left[\frac{\partial h}{\partial x}\cdot \ln f(x,y) + h(x,y)\cdot\frac{1}{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right] = f(x,y)^{f(y,x)}\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial y}(S(x,y))\cdot \ln f(x,y) + \frac{f(S(x,y))}{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]$

$\frac{\partial g}{\partial y} = f(x,y)^{f(y,x)}\cdot\left[\frac{\partial h}{\partial y}\cdot \ln f(x,y) + h(x,y)\cdot\frac{1}{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right] = f(x,y)^{f(y,x)}\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x}(S(x,y))\cdot \ln f(x,y) + \frac{f(S(x,y))}{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$

Bez použití $S$: $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)\ln f(x,y) + \frac{f(y,x)}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]$ a podobně $\frac{\partial g}{\partial y}$

Zde značíme $\frac{\partial f}{\partial x}$ derivaci podle první proměnné a $\frac{\partial f}{\partial y}$ derivaci podle druhé proměnné. Je to totéž co $\frac{\partial f}{\partial s}$, resp. $\frac{\partial f}{\partial t}$.