Hlubší vlastnosti funkcí

Lokální a globální extrémy funkcí

Nalezněte lokální extrémy funkcí

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4,\ x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x,\ x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}},\ x \in \mathbb{R}$
   Dokažte následující nerovnosti
4. $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q},\ x, y > 0,\ 1 < p, q < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (Youngova nerovnost)
5. $\mathrm{e}^x > x + 1,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
6. Dokažte, že funkce
   $$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   má v bodě 0 ostré lokální minimum a funkce
   $$g(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   nemá v bodě 0 lokální extrém, přestože platí $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.
7. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.
8. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = x\mathrm{e}^{-0.01x}$ na intervalu $(0, \infty)$.
9. Nádoba naplněná vodou se svislou stěnou výšky h stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále.

10. Mezi dvěma svislými tyčemi, jejichž vzdálenost je d, je upevněna za konce niť délky l. Rozdíl výšek upevnění je h. Po niti může volně klouzat hmotný bod. Najděte rovnovážnou polohu bodu za podmínky, že potenciální energie má být minimální.

Monotónie funkcí

11. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$, rostoucí a klesající.

12. Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}\,,$$

kde $x = \frac{T^*}{T}$, T je absolutní teplota v kelvinech, T^* je tzv. charakteristická teplota a R je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce teploty.

Konvexita, konkávnost

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní/konkávní, a najděte inflexní body

13. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = x \sin \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

15. Dokažte nerovnost $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $x, y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$ a vysvětlete její geometrický význam.

Extrémy funkcí

x_0 je stacionární bod fce $f \iff f'(x_0) = 0$

$f'(x) \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}$ na $(a,b) \Rightarrow f$ je $\begin{matrix} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{matrix}$ na (a,b)

f má v x_0 lokální maximum (resp. minimum) $\iff \exists$ okolí U bodu x_0 t.ž. $\forall x \in U \cap D_f$:
$f(x) \leq f(x_0)$
(resp. $f(x) \geq f(x_0)$)

Platí-li rovnost jen pro $x = x_0$, jde o ostré max./min.

- Je-li f spojitá na okolí x_0, pak: pokud f je rostoucí na levém okolí x_0 a klesající na pravém okolí x_0
$\Rightarrow f$ má v x_0 ostré lok. max.

Pokud je pořadí opačné: ostré lok. min. v x_0.

__Věta__: f má v x_0 lokální extrém a existuje $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Věta: Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ je ostré lok. min.
$< 0 \Rightarrow$ max.
$= 0 \Rightarrow$ nelze rozhodnout, může nastat cokoli včetně neex. extrému.

Globální extrémy: Na otevřeném intervalu nemusí existovat, ale platí

__Věta__: f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b] \Rightarrow f$ má v $[a,b]$ globální max. i min.

V příkladech: vyšetřit lokální extrémy v (a,b) + krajní body $x = a$, $x = b$.

---

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

$D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$ se spojitými derivacemi všech řádů

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

$f' = 0$: $x^2 - 4x + 3 = 0$
$(x-1)(x-3) = 0$
$\Rightarrow x = 1, x = 3$ jsou stacionární body

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow x = 1$ je bod lokálního maxima

$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow x = 3$ je bod lokálního minima

---

2) $f(x) = e^x \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$ a má spojité derivace

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

$f' = 0 \iff \sin x + \cos x = 0$ $(e^x > 0$ vždy$)$

$\underline{x = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$

$f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$
$= 2e^x \cos x$

$f''\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) = K \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)}_{<0}$ pro $K > 0$

$f''\left(\frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right) = L \cdot \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) > 0$

Odtud: Body $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ jsou lokální maxima
Body $x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$ jsou lokální minima

---

3) DÚ

4) Později u konvexity/konkávnosti

5) Definujeme funkci $f(x) = e^x - x - 1$. $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá se spojitými derivacemi na $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - 1$ $\qquad$ $f' = 0 : e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ je stac. bod

$f''(x) = e^x$ $\qquad$ $f''(0) = e^0 = 1 > 0 \Rightarrow x = 0$ je lok. minimum.

Jiné extrémy nejsou, f je klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $(0, \infty)$, $f(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow e^x > x + 1 \quad \forall x \neq 0.$

---

6) Příště

7) DÚ

Lokální a globální extrémy: viz předchozí cvičení

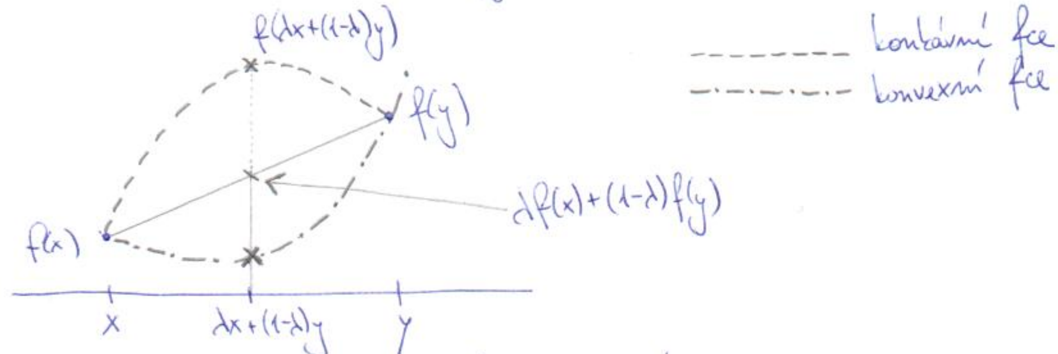
Def: f je spojitá na (a,b). Pak f je konvexní na (a,b), pokud pro libovolné $\lambda \in (0,1)$

plati $\forall x,y \in (a,b),\ x<y:\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

f je konkávní, pokud platí opačná nerovnost

Náhled: U konvexní fce leží každá tečna pod grafem funkce.
U konkávní fce leží každá tečna nad grafem funkce.

Nerovnost z definice:



Inflexní bod: bod, ve kterém se mění konvexita v konkávnost nebo naopak

Konvexita a konkávnost v bodě: f je konvex. v bodě x_0, pokud $\exists \delta > 0$ tak, že

$\forall x \in P_\delta(x_0)$: bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou ke grafu f v bodě x_0

Podobně konkávita v x_0

---

6) $f(x) = e^{-1/x^2}$ pro $x \neq 0$
$ = 0$ pro $x = 0$.

a) f je očividně spojitá, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$

b) $f'(x)$ pro $x \neq 0$: $f' = e^{-1/x^2} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$

a vidíme, že pro $x<0$ je $f'<0$ a f je klesající
a pro $x>0$ je $f'>0$ a f je rostoucí.

Proto je bod $x=0$ bodem lokálního i globálního minima.

$g(x) = xe^{-1/x^2}$ pro $x \neq 0$
$ = 0$ pro $x = 0$

a) podobně g je očividně spojitá

b) $g'(x)$ pro $x \neq 0$: $g' = e^{-1/x^2} + xe^{-1/x^2} \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{e^{-1/x^2}(x^2+2)}{x^2}$

a $g'>0$ pro všechna $x \neq 0$, $\lim_{x \to 0} g' = 0$

Vyšší derivace budou všechny tvaru $\frac{e^{-1/x^2}}{x^n} \cdot P(x)$, kde P je polynom a $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} \cdot \frac{P(x)}{x^n} = 0$

díky škálovací limitě (exp vždy vyhraje nad x^n)

Protože $g' > 0$ pro $x \neq 0$, v bodě $x=0$ není extrém.

8) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{100}}$

Nejprve limity v krajních bodech: $\lim_{x \to 0} x \cdot e^{-\frac{x}{100}} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{-\frac{x}{100}} = 0$ (škálovací limita, exp vyhraje, kdo nevěří: l'Hospital "$\frac{x}{e^{\frac{x}{100}}}$")

Očividně je $f(x)$ na $(0,\infty)$ kladná fce, proto $\inf_{x \in (0,\infty)} f(x) = 0$ [minimum neexistuje]

$f'(x) = e^{-\frac{x}{100}} + x \cdot e^{-\frac{x}{100}} \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) = e^{-\frac{x}{100}} \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$

$f' = 0$: $e^{-\frac{x}{100}} \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0$ $\quad$ $e^{-\frac{x}{100}} > 0$ vždy $\Rightarrow$ $\left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0$

$x = 100$

$\left.\begin{array}{l} f' > 0 \text{ pro } x < 100 \\ f' < 0 \text{ pro } x > 100 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 100$ je lok. max.

$f(100) = 100 \cdot e^{-1} = \frac{100}{e}$. Vzhledem k výše zjištěnému je to i globální maximum a supremum

$\sup_{x \in (0,+\infty)} f(x) = \frac{100}{e}$

---

9) Délka dostřiku vody: $d = v \cdot t$, kde v je rychlost v okamžiku opuštění nádoby, t je čas

Čas: $y = \frac{1}{2} g t^2$, kde y je výška, kterou hledáme. Tedy $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

Rychlost: Bernoulliho rovnice: $\frac{1}{2}\rho v_i^2 + \rho g h_i + p_i = \frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g h_e + p_e$

i ... uvnitř nádoby

e ... vně nádoby $\quad$ Víme: $v_i = 0$, $h_i = h_e = y$, $v_e = v$, $p_e = p_a$ ... atmosférický tlak

$p_i = p_a + (h - y)\rho g$

$\Rightarrow p_a + (h-y)\rho g = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_a \Rightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 = (h-y)\rho g$

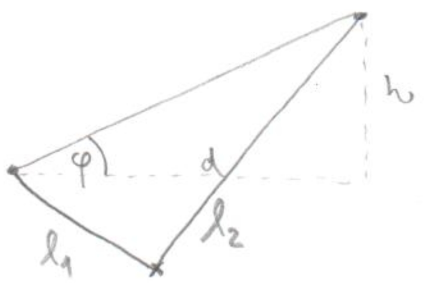
$v = \sqrt{2(h-y)g}$

$d(y) = v(y) \cdot t(y) = \sqrt{2(h-y)g} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{y(h-y)}$. Hledáme lokální max. na intervalu $y \in (0, h)$

$d'(y) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y(h-y)}} \cdot (h - y - y) = \frac{h - 2y}{\sqrt{y(h-y)}}$

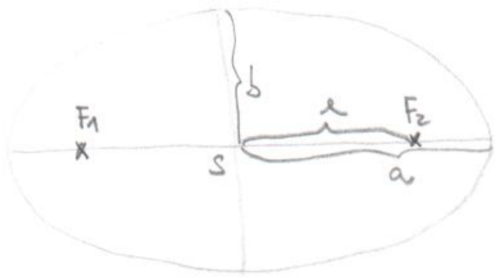
$d' = 0$: $h = 2y \Rightarrow \underline{y = h/2}$

$\left.\begin{array}{l} d' > 0 \text{ pro } y < h/2 \\ d' < 0 \text{ pro } y > h/2 \end{array}\right. \Rightarrow y = h/2$ je lok. max i glob. max na $[0, h]$



$l_1 + l_2 = l$ ... konstanta

Množina bodů, které mají součet vzdáleností od dvou daných bodů konstantní, je elipsa!



a... hlavní poloosa
b... vedlejší poloosa
Platí $2a = l$
Vzdálenost $|F_1S| = |F_2S| = \sqrt{a^2-b^2} = e$ .... excentricita
(Někdy se excentricitou nazývá poměr $e/a \in (0,1)$)

My máme $2e = 2\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{d^2+h^2}$

$$4a^2-4b^2 = d^2+h^2$$
$$l^2-4b^2 = d^2+h^2 \Rightarrow \cancel{b=\frac{1}{2}\sqrt{d^2+h^2-l^2}} \quad b=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2-h^2}$$

Rovnice elipsy s rovnými osami: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, kde (x_0,y_0) je střed

Parametricky: $x = x_0 + a\cos t$, $y = y_0 + b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$

Náš případ: zvolíme střed $(x_0,y_0)=(0,0)$, ale elipsa je natočená o úhel φ, $tg\varphi = \frac{h}{d}$, $\varphi = arctg\frac{h}{d}$

Otočení o úhel φ: $X = x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $Y = y\cos\varphi + x\sin\varphi$ $\Rightarrow$ $X = a\cos t\cos\varphi - b\sin t\sin\varphi$, $Y = b\sin t\cos\varphi + a\cos t\sin\varphi$

Hledáme minimum funkce $Y(t)$: $Y'(t) = b\cos t\cos\varphi - a\sin t\sin\varphi$

$Y'(t) = 0$: $b\cos t\cos\varphi = a\sin t\sin\varphi$

$$tg\, t = \frac{b}{a}cotg\varphi = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{tg\varphi} = \frac{b}{a}\frac{d}{h} = \frac{d}{h}\cdot\frac{\sqrt{l^2-d^2-h^2}}{l}$$

$$\Rightarrow t = arctg\left(\frac{d}{h}\cdot\frac{\sqrt{l^2-d^2-h^2}}{l}\right) + \pi$$

(protože víme, že minimum je ve 3. kvadrantu, tedy s úhlem $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$)

11) $f(x) = x^n e^{-x}$

$$f'(x) = n x^{n-1} e^{-x} + x^n e^{-x} \cdot (-1) = x^{n-1} e^{-x} (n - x)$$

Stacionární body: $e^{-x} > 0 \ \forall x \Rightarrow x = 0,\ x = n$

Znaménko $f'(x)$: $x < 0$: $n - x > 0,\ e^{-x} > 0,\ x^{n-1} < 0$ pro n sudé $\Rightarrow f' < 0$

$x^{n-1} > 0$ pro n liché $\Rightarrow f' > 0$

$x \in (0, n)$: $n - x > 0,\ e^{-x} > 0,\ x^{n-1} > 0 \Rightarrow f' > 0$ ~~pro~~

$x \in (n, +\infty)$: $n - x < 0,\ e^{-x} > 0,\ x^{n-1} > 0 \Rightarrow f' < 0$

Celkem: n sudé: f je klesající na $(-\infty, 0)$,
rostoucí na $(0, n)$
klesající na (n, ∞)

n liché: f je rostoucí na $(-\infty, n)$
klesající na $(n, +\infty)$

---

12) $$C_V(T) = \frac{3RT^{*2}}{T^2} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{\left(e^{T^*/T} - 1\right)^2}$$

$$C_V'(T) = (-2)\,3RT^{*2} \cdot T^{-3} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{\left(e^{T^*/T} - 1\right)^2} + \frac{3RT^{*2}}{T^2} \cdot \left[\frac{e^{T^*/T}\left(-\frac{T^*}{T^2}\right)\left(e^{T^*/T} - 1\right)^2 - e^{T^*/T} \cdot 2\left(e^{T^*/T} - 1\right) \cdot \left(-\frac{T^*}{T^2}\right) e^{T^*/T}}{\left(e^{T^*/T} - 1\right)^4}\right]$$

Hledáme, kde (pro jaká $T > 0$) je $C_V'(T) > 0$

$$C_V'(T) = \underbrace{\frac{3RT^{*2}}{T^2} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{\left(e^{T^*/T} - 1\right)^2}}_{>0} \cdot \left[-\frac{2}{T} + \frac{\left(-\frac{T^*}{T^2}\right)\left(e^{T^*/T} - 1\right)^2 + \frac{2T^*}{T^2}\left(e^{T^*/T} - 1\right) e^{T^*/T}}{\left(e^{T^*/T} - 1\right)^2}\right]$$

Tj. chceme: $$-\frac{2}{T} - \frac{T^*}{T^2} + \frac{2T^*}{T^2} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{e^{T^*/T} - 1} > 0$$

$\big\downarrow\ T > 0$

$$-2 - \frac{T^*}{T} + 2\frac{T^*}{T} \cdot \frac{e^{T^*/T}}{e^{T^*/T} - 1} > 0$$

$\big\downarrow\ T > 0$

$$-2T - T^* + 2T^* \frac{e^{T^*/T}}{e^{T^*/T} - 1} > 0$$

$\big\downarrow\ e^{T^*/T} - 1 > 0$

$$2T^* e^{T^*/T} > (2T + T^*)\left(e^{T^*/T} - 1\right) = 2Te^{T^*/T} + T^* e^{T^*/T} - 2T - T^*$$

$$T^* e^{T^*/T} - 2Te^{T^*/T} + 2T + T^* > 0$$

$$\frac{T^*}{T} e^{T^*/T} - 2e^{T^*/T} + 2 + \frac{T^*}{T} > 0 \ ?$$

Označme $y = \frac{T^*}{T}$. $T \in (0, \infty) \Rightarrow \frac{T^*}{T} \in (0, \infty)$. Chceme ukázat, že $f(y) = ye^y - 2e^y + 2 + y > 0$ pro $y > 0$.

Lehce $f(0) = 0$. Spočítáme $f'(y) = ye^y + e^y - 2e^y + 1 = ye^y - e^y + 1$. Opět $f'(0) = 0$.

Spočítáme $f''(y) = ye^y + e^y - e^y = ye^y$. Zde lehce $f''(y) > 0$ pro $y > 0$.

Proto $f'(y)$ je rostoucí na $(0, +\infty)$. Protože $f'(0) = 0$, musí být $f'(y) > 0$ pro $y > 0$

Proto $f(y)$ je rostoucí na $(0, +\infty)$. Protože $f(0) = 0$, musí být $f(y) > 0$ pro $y > 0$.

Proto tedy $C_V'(T) > 0$ a tedy C_V je rostoucí fce proměnné T pro $T \in (0, +\infty)$.

---

13) $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = -2 \cdot \left(e^{-x^2} + xe^{-x^2} \cdot (-2x)\right) = -2e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$

$f''(x) = 0 \;:\; 1 - 2x^2 = 0$ (protože $e^{-x^2} > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$)

$x^2 = 1/2 \qquad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pro $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ je $f''(x) < 0$ a $f(x)$ je konkávní

Pro $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ a $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ je $f(x)$ konvexní, body $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ jsou inflexní

---

14) DÚ

15) Jde o speciální případ z definice konvexnosti fce $f(x) = x^n$ (pro $\lambda = 1/2$) na intervalu $(0, +\infty)$

$f'(x) = nx^{n-1} \qquad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Protože dle předpokladu je $n > 1$, $n(n-1) > 0$, $x^{n-2} > 0$,

máme $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní

---

4) Začneme tím, že $f(x) = \ln x$ je konkávní. $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \;\forall x > 0$

Z definice konkávnosti ($\lambda = 1/p$, $1 - \lambda = 1/q$)

$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q = \ln x + \ln y = \ln(xy)$.

Je-li $A \geq B$, pak $e^A \geq e^B$ (protože e^x je rostoucí fce)

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right)}}_{\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}} \geq \underbrace{e^{\ln(xy)}}_{xy}$$

$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$. Důkaz je hotov.