Sada příkladů 2/9

Metrické prostory

Stefan Banach a jedna z jeho vět

1. Metodou postupných aproximací nalezněte řešení rovnice $y' = ay$, $y(0) = \kappa$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

2. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice $2x + \sin x = 1$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

3. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice
$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 s y(s)\,\mathrm{d}s + x.$$
Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje. Srovnejte toto řešení s přesných řešením, které lze hledat ve tvaru $y(x) = \alpha x^2 + x$.

4. Dokažte: pro každé $0 \le a \le 1$ konverguje posloupnost
$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0$$
k hodnotě $\sqrt{a}$ (iterační metoda výpočtu odmocniny).

Funkce více proměnných

Limita a spojitost funkcí více proměnných

Spočtěte následující limity

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$

6. $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$

7. $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

11. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

platí

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

neexistuje.

12. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

limity

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \text{ a } \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$$

neexistují, ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, x.y\neq 0} f(x,y) = 0.$$

V metrických prostorech (P, ρ) definujeme pojmy: $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) = \{x \in P : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$

$$P_\varepsilon(x_0) = \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Tj. zobecnění pojmů okolí do metrických prostorů.

Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x \in P_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(y_0)$$

Řekneme, že f je spojitá v x_0, pokud $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$

Úlohy na Banachovu větu o kontrakci neřešíme.

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \exp\left(x^2y^2 \cdot \ln(x^2+y^2)\right) = \exp \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 \ln(x^2+y^2)$

↑ VOLSF s vnější fcí spojitou funguje stejně

$= \exp \lim\limits_{r\to 0} r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \ln(r^2)$ [používáme $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$]

Nyní víme, že $\lim\limits_{r\to 0} 2r^4 \ln r = 0$ dle škálovacích limit a

$\cos^2\varphi \sin^2\varphi$ je omezená funkce na intervalu $[0, 2\pi)$

Proto dle věty o limitě součinu "0 · omezená" dostáváme výsledek $\exp 0 = \underline{\underline{1}}$

---

6) $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{r\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2\cdot(1-\cos\varphi\sin\varphi)} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{2\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}{2-\sin 2\varphi}$

Opět použijeme větu "0 · omezená", $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r} = 0$, $f(\varphi) = \frac{2\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}{2-\sin 2\varphi}$ je omezená funkce na intervalu $[0, 2\pi)$, protože jmenovatel se nikdy nepřiblíží nule.

Proto $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$

---

7) $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{r^2}{r^4\cdot(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} = 0$

Znovu "0 · omezená": $\frac{1}{r^2}$ jde k nule pro $r\to\infty$

$\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$ je omezená fce na $[0, 2\pi)$, protože jmenovatel se nikdy nepřiblíží 0.

---

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} y \cdot \frac{\sin xy}{xy} = a \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{xy} = a \cdot 1 = a$

Postupně používáme: 1) rovnost limit pro funkce rovnající se na prstencovém okolí

2) VOAL

3) VOLSF, kde vnitřní fce $\varphi(x,y) = xy$ nenabývá limitní hodnoty 0 na prstencovém okolí bodu $(0,a)$ průnikem s definičním oborem původní funkce $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}$ (tj. $x \neq 0$)

Pro $a = 0$ uvažujeme trošku jinak, protože první krok omezuje definiční obor na $y \neq 0$. $y = 0$ vyšetříme zvlášť a vidíme, že $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x} = 0$ pro $y = 0, x \neq 0$, což v kombinaci s předchozím dá stejný výsledek

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$ Vidíme, že $f(x,y)=\dfrac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$ je definována všude mimo $x=\pm y$

Tam je jmenovatel nulový a funkce $f(x,y)$ tam proto utíká do $\pm\infty$

Fakt, že na okolí přímek $x=\pm y$ jsou libovolně velké hodnoty, zamezí existenci limity.

Nejprve položme $x=0$. Pak $f(0,y)=\dfrac{y^6}{-y^2}=-y^4$ a $\lim\limits_{y\to0} f(0,y)=0$. Proto jediným kandidátem na hodnotu limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ je nula. Dokážeme, že nula není limitou sporem s definicí limity, neboli ukážeme $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists (x,y)\in P_\delta(0,0)\cap D_f \wedge f(x,y)\notin U_\varepsilon(0)$.

Zvolme $\varepsilon=1$. Nechť $\delta>0$ je dáno. Najdeme $(x,y)\in P_\delta(0,0)\cap D_f$ a $|f(x,y)|>1$

Přechodem k polárním souřadnicím hledáme (r,φ) tak, že $\begin{matrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{matrix}$, $(x,y)\in P_\delta(0,0)\cap D_f$

Zvolme $r=\frac{\delta}{2}$. Pak očividně $(x,y)\in P_\delta(0,0)$ pro libovolné φ takové, že $(x,y)\in D_f$

Při přepisu do polárních souřadnic je $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=r^4\cdot\dfrac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}=r^4\cdot\dfrac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos2\varphi}$

Vidíme, že $\varphi\neq \pi/4+k\pi/2$, $k=0,1,2,3$ je definiční obor f.

Najdeme $\varphi\neq\pi/4+k\pi/2$ tak, že $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ pro $r=\frac{\delta}{2}$ bude větší než 1.

Máme $\dfrac{\delta^4}{16}\cdot\dfrac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos2\varphi}>1$ a hledáme φ na intervalu $(0,\pi/4)$, aby $f(x,y)>0$.

Očividně existuje $c>0$ tak, že $\cos^6\varphi+\sin^6\varphi>c$ $\forall\varphi\in\mathbb{R}$. Pokud najdeme φ t.ž. $\dfrac{\delta^4}{16}\dfrac{c}{\cos2\varphi}>1$, pak jistě bude platit: $\dfrac{\delta^4}{16}\cdot\dfrac{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}{\cos2\varphi}>\dfrac{\delta^4}{16}\cdot\dfrac{c}{\cos2\varphi}>1$.

Nyní už $\cos2\varphi<c\dfrac{\delta^4}{16}$, tj. $2\varphi>\arccos\left(c\dfrac{\delta^4}{16}\right)$ a konečně $\varphi\in\left(\frac12\arccos\left(c\frac{\delta^4}{16}\right),\pi/4\right)$

Položme tedy $\varphi=\frac14\arccos\left(c\frac{\delta^4}{16}\right)+\pi/8$ a jsme hotovi.

---

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ Vidíme, že pro $x=0$ je $f(0,y)=0$ a kandidát na limitu je 0.

Ovšem pro $x=y$ je $f(x,y)=\dfrac{2x^2}{2x^2}=1$ a kandidát na limitu je 1.

Limita tak neexistuje, na každém prstencovém okolí počátku jsou body s fční hodnotou 0 i body s fční hodnotou 1.

---

11) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Očividně pro $x\neq0$ je $\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=\dfrac{0}{x^2}=0$

a proto $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{x\to0} 0=0$.

Podobně pro $\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\right)$.

Kandidát na limitu je tak 0, ovšem pro $x=y$ je $f(x,y)=1$.
Proto na libovolném prstencovém okolí počátku jsou body s fční hodnotou 0 i body s fční hodnotou 1, limita proto neexistuje.

---

12) $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

Pro $x \neq 0$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \sin\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\cdot\sin\frac{1}{y}$.

Funkce $\sin\frac{1}{y}$ nemá pro $y\to 0$ limitu, je jen omezená. $x+y \to x \neq 0$, takže nemůžeme použít ani "0 · omezená". $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ neexistuje. Totéž pro $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

Ovšem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, protože $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0$ a funkce $\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$ je na svém definičním oboru omezená, takže zde už můžeme použít větu "0 · omezená".
