Sada příkladů 1/2

Newtonův a Riemannův integrál

Aplikace integrálu

Spočtěte obsahy části rovin, omezené následujícími křivkami

1. $y = x^2$, $x + y = 2$
2. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$
3. $y = |\ln x|$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 10$
4. $xy = 4$, $x + y = 5$
5. $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.
6. Nalezněte obsah elipsy s poloosami a, b.
7. Nalezněte obsah oblasti ohraničené kardioidou $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
8. Nalezněte obsah oblasti ohraničené lemniskátou $r = 4\sin^2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
9. Nalezněte obsah oblasti ohraničené $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
10. Odvoďte vztahy pro objem koule, kuželu, jehlanu.
11. Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblouku kardioidy $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in (0, \pi)$ kolem osy x.
12. Spočtěte objem části tělesa $x^2 + 4y^2 \leq a^2$ ležícího mezi rovinami $z = 0$ a $y = z$.
13. Odvoďte vztah pro délku kružnice.
14. Spočtěte délku křivky $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$.
15. Spočtěte délku evolventy kruhu $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

16. Odvoďte vzorec pro povrch koule.

17. Nalezněte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = x^3$, $|x| \leq 1$ kolem osy x.

18. Nalezněte polohu těžiště homogenního čtvrtkruhu o poloměru r.

19. Nalezněte polohu těžiště poloviny homogenní asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, \pi]$.

20. Naleznětě polohu těžiště homogenní polokoule $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x > 0$.

21. Určete moment setrvačnosti oblouku asteroidy (viz výše, $t \in [0, \pi/2]$) vzhledem k souřadnicovým osám.

22. Přímočarý pohyb tělesa je daný funkcí $s = ct^3$, kde $s(t)$ je délka dráhy za čas t. Odpor prostředí je úměrný čtverci rychlosti. Vypočítejte práci, kterou vykonají třecí síly, pokud těleso projde dráhu od $s = 0$ do $s = a$.

23. Při průchodu radioaktivního záření vrstvou látky o tloušťce h poklesla jeho intenzita na polovinu původní hodnoty. Jaká bude intenzita tohoto záření po průchodu vrstvou o tloušťce H? (Úlohu řešte za předpokladu, že intenzita záření absorbovaného tenkou vrstvou látky je přímo úměrná tloušťce vrstvy a intenzitě dopadajícího záření).