Sada příkladů 1/1

Opakování

Opakování ze SŠ

1. Nalezněte reálnou a imaginární část
   a) $\dfrac{2}{1-3\mathrm{i}}$ b) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$

2. Nalezněte velikosti a argumenty následujících komplexních čísel
   a) $-2-2\mathrm{i}$ b)$1+\mathrm{i}^{123}$

3. Dokažte
   a) $z+\overline{z}=2\mathcal{R}\mathrm{e}\, z$ b) $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\mathcal{I}\mathrm{m}\, z$ c) $\overline{(\overline{z})}=z$
   d) $|\overline{z}|=|z|$ e) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
   f) $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1,z_2\neq 0$
   g) $\arg(\frac{z_1}{z_2})=\arg z_1-\arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1,z_2\neq 0$

4. Řešte v $\mathbb{C}$:
   a) $x^6+1=0$ b) $x^2+x+1=0$

5. Řešte v $\mathbb{R}$:
   a) $|x+1|+|x-1|\geq 2$ b) $|x-3|+|x+2|\leq 0$

Výroky, množiny, zobrazení

6. Dokažte, že platí
   a) $A\Rightarrow A$
   b) $(A\Rightarrow B\bigwedge B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$
   c) $A\Leftrightarrow A$
   d) $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(B\Leftrightarrow A)$
   e) $(A\Leftrightarrow B\bigwedge B\Leftrightarrow C)\Rightarrow(A\Leftrightarrow C)$
   f) $\mathrm{non}\,(\mathrm{non}\,A)\Leftrightarrow A$
   g) $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\mathrm{non}\,B\Rightarrow\mathrm{non}\,A)$
   h) $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(\mathrm{non}\,B\Leftrightarrow\mathrm{non}\,A)$
   i) $(\mathrm{non}\,(A\bigvee B))\Leftrightarrow((\mathrm{non}\,A)\bigwedge(\mathrm{non}\,B))$
   j) $(\mathrm{non}\,(A\bigwedge B))\Leftrightarrow((\mathrm{non}\,A)\bigvee(\mathrm{non}\,B))$

k) $(\text{non}\,(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \bigwedge (\text{non}\,B))$
l) $(\text{non}\,(A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \bigwedge (\text{non}\,B)) \bigvee (B \bigwedge (\text{non}\,A))$

7. Zapište negaci výroku

$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

8. Platí následující výroky?
a) $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, \exists \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
b) $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \exists x \in (a, a+\varepsilon) : x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

9. Dokažte:
a) $C \setminus (A \bigcup B) = (C \setminus A) \bigcap (C \setminus B)$
b) $C \setminus (A \bigcap B) = (C \setminus A) \bigcup (C \setminus B)$
c) Nechť A_i, $i = 1, 2, \ldots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

10. Dokažte, že je-li f zobrazení, pak

$$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)\,.$$

(M_1, M_2 jsou podmnožiny definičního oboru f.) Kdy platí rovnost?

11. Nechť $\varphi : [0, \infty) \to [1, \infty)$ je bijekce a nechť $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1} a vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. Určete $D_{\psi^{-1}}$.