Sada příkladů 2/9

# Metrické prostory

## Stefan Banach a jedna z jeho vět

1. Metodou postupných aproximací nalezněte řešení rovnice $y' = ay$, $y(0) = \kappa$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

2. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice $2x + \sin x = 1$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

3. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice
$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 s y(s)\,\mathrm{d}s + x.$$
Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje. Srovnejte toto řešení s přesných řešením, které lze hledat ve tvaru $y(x) = \alpha x^2 + x$.

4. Dokažte: pro každé $0 \le a \le 1$ konverguje posloupnost
$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0$$
k hodnotě $\sqrt{a}$ (iterační metoda výpočtu odmocniny).

# Funkce více proměnných

## Limita a spojitost funkcí více proměnných

Spočtěte následující limity

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

6. $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$

7. $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$

11. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

platí

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

neexistuje.

12. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

limity

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \text{ a } \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$$

neexistují, ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, x.y\neq 0} f(x,y) = 0.$$