1.)

Najděte primitivní funkci na maximálním možném intervalu

$$\int \frac{\sin(x)}{\big(\cos(x)-2\big)\left(\cos^2(x)+4\right)} + xe^x\,dx$$

Řešení: Využijme linearitu neurčitého integrálu a rozdělme jej na dva lehčí integrály.

$$I_1 = \int \frac{\sin(x)}{\big(\cos(x)-2\big)\left(\cos^2(x)+4\right)}\,dx$$
$$I_2 = \int xe^x\,dx$$

S druhým si poradíme díky jednoduchému per partes.

$$I_2 = \int xe^x\,dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x\,dx = e^x\,(x-1) + C$$

První integrál převedeme pomocí první věty o substituci na integrál racionální funkce.

$$I_1 = \int \frac{\sin(x)}{\big(\cos(x)-2\big)\left(\cos^2(x)+4\right)}\,dx = \begin{vmatrix} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x)\,dx \end{vmatrix} = -\int \frac{1}{(t-2)(t^2+4)}\,dt$$

Jmenovatel je již rozložený na součin a připravený tak na parciální zlomky.

$$\frac{1}{(t-2)(t^2+4)} = \frac{A}{t-2} + \frac{Bt+C}{t^2+4}$$
$$1 = At^2 + 4A + Bt^2 - 2Bt + Ct - 2C$$
$$1 = t^2(A+B) + t(C-2B) + 4A - 2C$$

$$0 = A + B \qquad 0 = C - 2B \qquad 1 = 4A - 2C$$

Vyřešením této soustavy lineárních rovnic dostáváme

$$A = \frac{1}{8}, \qquad B = -\frac{1}{8}, \qquad C = -\frac{1}{4}.$$

Integrál tedy přepíšeme do tvaru

$$I_1 = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{t-2}\,dt + \frac{1}{8}\int \frac{t+2}{t^2+4}\,dt = -\frac{1}{8}\underbrace{\int \frac{1}{t-2}\,dt}_{=\ln|t-2|} + \frac{1}{16}\underbrace{\int \frac{2t}{t^2+4}\,dt}_{=\ln|t^2+4|} + \frac{1}{16}\underbrace{\int \frac{4}{t^2+4}\,dt}_{\text{řešme}}$$

$$\int \frac{4}{t^2+4}\,dt = \int \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

Dohromady po zpětné substituci $t = \cos(x)$ dostáváme výsledek

$$I_1 + I_2 = -\frac{1}{8}\ln|\cos(x)-2| + \frac{1}{16}\ln|\cos^2(x)+4| + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos(x)}{2}\right) + e^x\,(x-1) + C$$

□

2.)

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x\,|3 - x|\,\sqrt{e^{-x}}$$

a načrtněte její graf.

Řešení: Nejprve si přepišme funkci do tvaru

$$f(x) = \begin{cases} x(3-x)e^{-\frac{x}{2}} & x \in (-\infty, 3) \\ x(x-3)e^{-\frac{x}{2}} & x \in (3, \infty) \end{cases}$$

Na těchto dvou intervalech se funkce liší pouze faktorem -1, stačí proto pro jednoduchost vyšetřovat průběh bez absolutní hodnoty a mít v paměti, že na intervalu $(3, \infty)$ bude mít vše opačné znaménko.

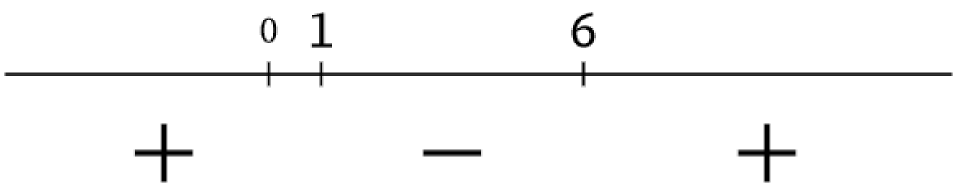
Prvně si všimneme, že funkce f je definovaná na celém $\mathbb{R}$ a je také všude spojitá. Je nám zadána ve tvaru součinu, tudíž najít kořeny je triviální, jsou to body $x = 0$ a $x = 3$. Jelikož exponenciála přebíjí v nekonečnu jakýkoli polynom, limity v nevlastních bodech jsou dány čistě znaménkem a chováním exponenciály.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0^+$$

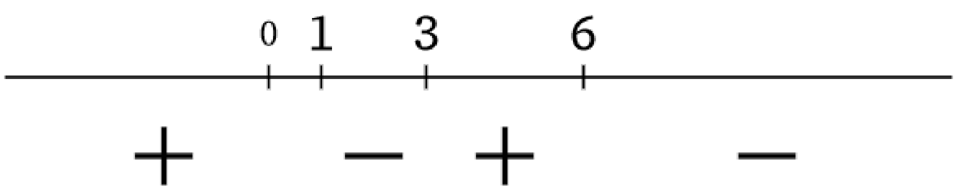
Nyní funkci zderivujme na intervalu $(-\infty, 3)$.

$$f'(x) = \left(3xe^{-\frac{x}{2}} - x^2e^{-\frac{x}{2}}\right)' = 3e^{-\frac{x}{2}} - \frac{3}{2}xe^{-\frac{x}{2}} - 2xe^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x^2e^{-\frac{x}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 - 7x + 6\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x-1)(x-6)$$

Bez absolutní hodnoty v zadání by znaménko první derivace vypadalo následovně



Obrázek 1: Znaménka 1. derivace (bez absolutní hodnoty)



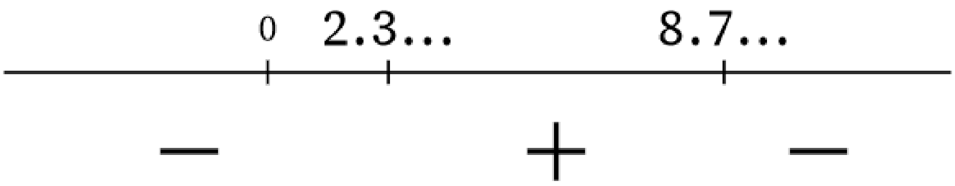
Obrázek 2: Znaménka 1. derivace (s absolutní hodnotou)

Vidíme, že funkce f má v bodě 1 a 6 lokální maxima a v bodě 3 lokální minimum. Derivace tam sice není nulová, ale díky absolutní hodnotě tam vůbec neexistuje, proto nejsme v rozporu s nutnou podmínkou pro lokální extrém.

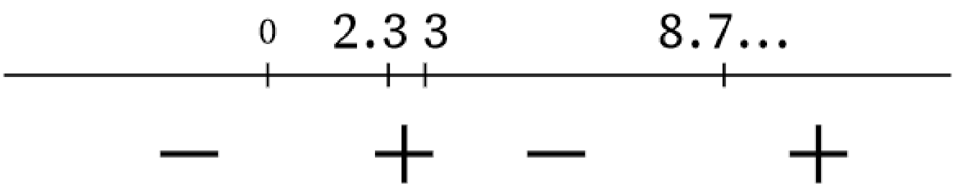
Zderivujme funkci podruhé na intervalu $(3, \infty)$:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 - 7x + 6\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(2x - 7\right)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\left(x^2 - 7x + 6\right)e^{-\frac{x}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 - 11x + 20\right) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x - \frac{11}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(x - \frac{11}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}\right) \approx$$
$$\approx -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x - 8.7\right)\left(x - 2.3\right)$$

Znaménko opět vyčteme z chování kvadratické funkce a poté zohledníme vliv absolutní hodnoty.



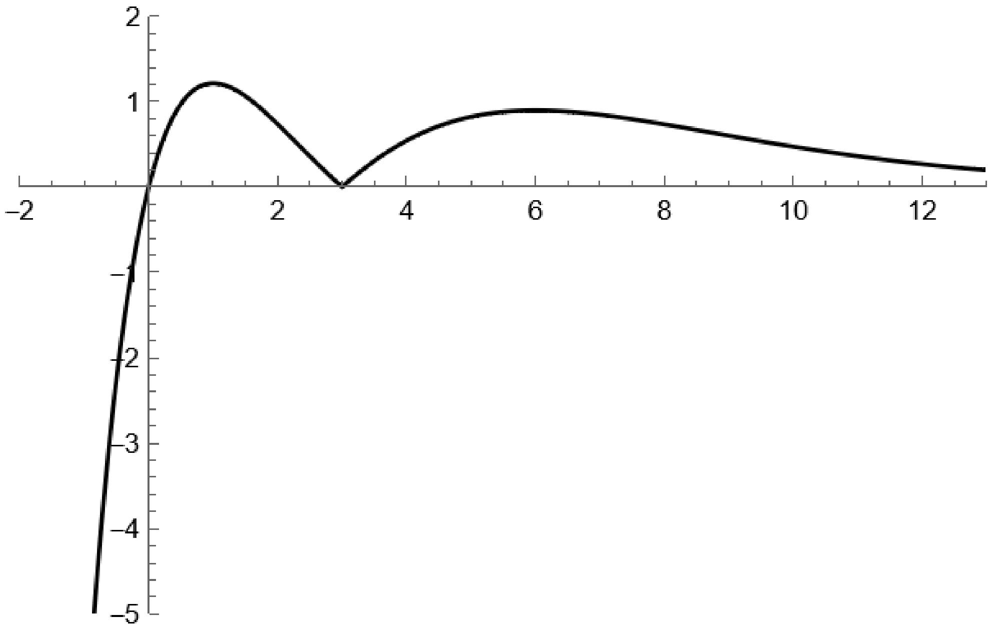
Obrázek 3: Znaménka 2. derivace (bez absolutní hodnoty)



Obrázek 4: Znaménka 2. derivace (s absolutní hodnotou)

Nyní jsme již připraveni načrtnout graf. Využijeme znalosti kořenů, lokálních extrémů a znamének funkce a jejích prvních dvou derivací.

□



Obrázek 5: "Náčrtek"grafu