1.)

Pro dané $n \in \mathbb{N}$ najděte limitu funkce

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\left(\frac{x}{\pi}\right)^n - 1}{\sqrt{x^2+\sin(x)} - x}$$

Řešení: Nejprve využijeme vzorečku pro $y^N - 1$ a usměrníme odmocninu ve jmenovateli.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(1+\frac{x}{\pi}+\ldots+\left(\frac{x}{\pi}\right)^{n-1}\right)}{\sqrt{x^2+\sin(x)} - x} \frac{\sqrt{x^2+\sin(x)}+x}{\sqrt{x^2+\sin(x)}+x}$$

Použijeme aritmetiku limit (limita součinu) a roztrhneme limitu na dvě. Poznamenejme, že pravá limita zřejmě existuje, existenci levé limity ověříme dalším výpočtem.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\left(\frac{x}{\pi}-1\right)}{x^2+\sin(x)-x^2}\left(1+\frac{x}{\pi}+\ldots+\left(\frac{x}{\pi}\right)^{n-1}\right)\left(\sqrt{x^2+\sin(x)}+x\right) =$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\left(\frac{x}{\pi}-1\right)}{\sin(x)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to\pi}\left(1+\frac{x}{\pi}+\ldots+\left(\frac{x}{\pi}\right)^{n-1}\right)\left(\sqrt{x^2+\sin(x)}+x\right)}_{\text{Můžeme dosadit } x=\pi \text{ a proto se tato limita rovná } n\cdot 2\pi} = 2n\pi \lim_{x\to\pi}\frac{\frac{x}{\pi}-1}{\sin(x)}$$

Nyní zavedeme substituci $x = y + \pi$. Po dosazení dostaneme vlastně složení funkcí g a x

$$g(x) = \frac{\frac{x}{\pi}-1}{\sin(x)}, \qquad x(y) = y+\pi, \qquad g(x(y)) = \frac{\frac{y+\pi}{\pi}-1}{\sin(y+\pi)}.$$

Vnitřní funkce x je lineární a tudíž na okolí 0 neosciluje okolo π (splňujeme podmínku k větě o limitě složené funkce). Můžeme proto psát

$$2n\pi \lim_{x\to\pi}\frac{\frac{x}{\pi}-1}{\sin(x)} = 2n\pi\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y+\pi}{\pi}-1}{\sin(y+\pi)} = 2n\pi\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{\pi}}{-\sin(y)} = -2n\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(y)} = -2n$$

Velmi podobný je příklad č. 6 ze 4. sady.

□

2.)

Najděte limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Řešení: Všimneme si, že tato limita má tvar "1^∞", proto použijeme klasický postup s exponenciálou.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)}{x^2}},$$

kde v poslední rovnosti využíváme větu o limitě složené funkce a faktu, že exponenciála (vnější funkce v tomto případě) je spojitá. Studujme samostatně limitu v exponentu.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}-1\right)}{\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}-1}\frac{\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}-1}{x^2}$$

Pomocí aritmetiky limit roztrhneme výraz na dvě limity, první vyhodnotíme hned díky větě o limitě složené funkce a faktu, že $\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}-1$ na nějakém okolí 0 neosciluje okolo hodnoty 0 (na okolí 0 je kladná), existenci druhé limity potvrdíme dalším výpočtem.

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}-1\right)}{\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}-1}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{\cos(2x)}}{x^2}$$

Nyní existuje mnoho způsobů, jak výraz upravovat, my použijeme vzorec pro kosinus dvojnásobného úhlu.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}\frac{\cos(x)-\cos^2(x)+\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}\frac{\cos(x)\left(1-\cos(x)\right)+\sin^2(x)}{x^2}$$

Nyní už jen použijeme aritmetiku limit, nejprve součin poté součet a pak zase součin, vše se zjednoduší a my dostaneme výsledek.

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(2x)}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\left(1-\cos(x)\right)+\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\cos(x)}_{=1}\underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}}_{=1} = \frac{3}{2}$$

Proto platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$$

□