Význam fundamentálního řešení pro obecný lin. dif. operátor

Řešení $Lx(t) = f(t)$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ získáme konvolucí f s x_F.

Opravdu: $L(x_F * f) = Lx_F * f = \delta * f = f$

(x_F fundamentální řešení; linearita a vlastnost konvoluce o derivování.)

Rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = f \quad \text{v} \quad Q_\infty := (0,\infty) \times \mathbb{R}^d,$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{v} \quad \mathbb{R}^d,$$

kde $k^2 = \frac{\varkappa}{c\rho}$, $\varkappa$... koeficient tepelné vodivosti, c... specifické teplo, ρ... hustota.

Princip superpozice

RVT je lineární úloha a lze ji rozdělit na 2 jednodušší úlohy

(I) $\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = 0$ v Q_∞, $u(0,\cdot) = u_0$ v $\mathbb{R}^d$

(II) $\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = f$ v Q_∞, $u(0,\cdot) = 0$ v $\mathbb{R}^d$

Ukážeme, že řešení je dáno vztahem

$$u(t,x) = u_0 *_{(x)} e_I + f *_{(t,x)} x_F, \quad e_I = \frac{1}{(4\pi k^2 t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4k^2 t}}, \quad x_F = e_I H(t).$$

kde e_I je fundamentální řešení $\left(\frac{\partial}{\partial t} - k^2\Delta\right) e_I = 0$ v Q_∞, $e_I(0,x) = \delta(x)$ v $\mathbb{R}^d$, (1)

a x_F je fundamentální řešení $\left(\frac{\partial}{\partial t} - k^2\Delta\right) x_F = \delta(t) \otimes \delta(x)$ v Q_∞, $x_F(0,x) = 0$ v $\mathbb{R}^d$. (2)

Ad I: Aplikujeme F.T. na (1):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\ell}_I + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{\ell}_I\right)(t,\xi) = 0$$

$$\hat{\ell}_I(0,\xi) = F(\delta(x)) = 1$$

$$\hat{\ell}_I = e^{-4\pi^2 k^2 |\xi|^2 t} \xrightarrow{F^{-1}} \ell_I(t,x) = \frac{1}{(4\pi k^2 t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4k^2 t}}$$

v $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$.

Ad II: Aplikujeme F.T. v x na (2)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{x}_F + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{x}_F\right)(t,\xi) = \delta(t) \quad \text{... pro pevné } \xi \text{ jde o hledání fund. řešení ODR 1. řádu}$$

$$\hat{x}_F(0,\xi) = 0$$

Najdeme řešení $\frac{\partial \hat{z}}{\partial t} + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{z} = 0$, $\hat{z}(0) = 1 \overset{\text{Ad I}}{\Rightarrow} \hat{z}(t) = e^{-4\pi^2 k^2 |\xi|^2 t}$

a $\hat{x}_F = \hat{z}(t) H(t) = e^{-4\pi^2 k^2 |\xi|^2 t} H(t)$ odfourierujeme

$$x_F = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi k^2 t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4k^2 t}} & \text{v } Q_\infty \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Speciálně v 1D

Řešení úlohy $\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = 0$, $u(0,x) = u_0(x)$ je rovno

$$u(t,x) = \ell_I * u_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4k^2 t}} * u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4k^2 t}} u_0(\xi)\, d\xi.$$

Speciální oblast 1 - úloha na polopřímce

Úlohu na polopřímce převedeme prodloužením na přímku:

(IC) P.P. $\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

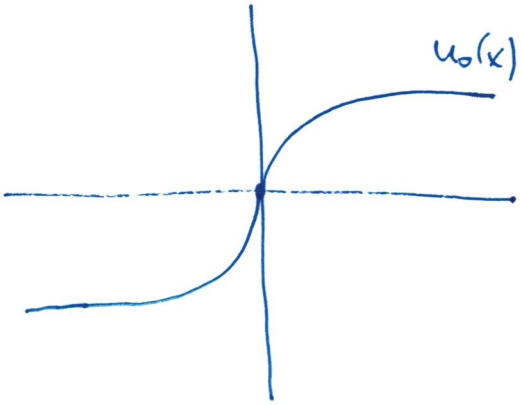
$u(x,0) = u_0(x)$ na $\mathbb{R}^+$

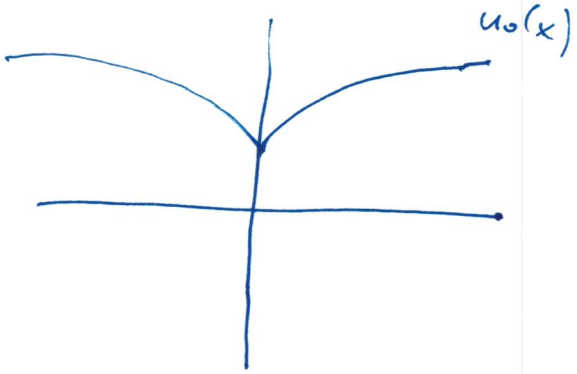
(BC) O.P. a) $u = 0$ pro $x = 0$ & $t > 0$

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pro $x = 0$ & $t > 0$

Řešíme a) lichým prodloužením $u_0(x)$ na $\mathbb{R}$

b) sudým prodloužením $u_0(x)$ na $\mathbb{R}$





liché prodloužení P.P. zaručí splnění O.P. $u = 0$ pro $x = 0$, protože i řešení bude liché

sudé prodloužení P.P. zaručí splnění O.P. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pro $x = 0$, protože i řešení bude sudé.

Speciální oblast 2 - úloha na úsečce

Úlohu na úsečce převedeme zperiodizováním & prodloužením na přímku

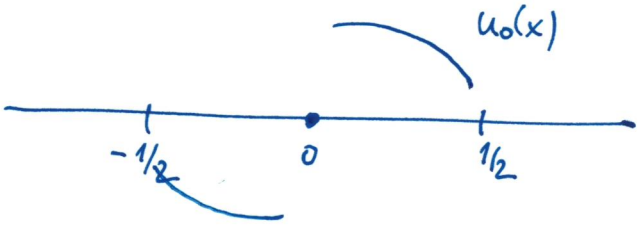
Př.: Máme úlohu $\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = 0$ na $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+$

$u(x,0) = u_0(x)$ $x \in [0, 1/2]$ P.P.

$u(0,t) = u(\frac{1}{2},t) = 0$ pro $t > 0$ O.P.

1) Nejprve liše prodloužíme na $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a označíme $\tilde{u}_0$

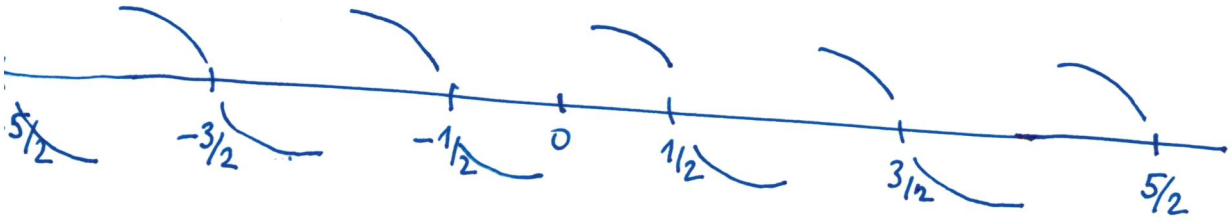
$\tilde{u}_0$:



2) Zperiodizujeme pomocí vzorkovací distribuce δ_Σ

$$\tilde{u}_0 = \tilde{u}_{0J} * \delta_\Sigma \,, \quad \delta_\Sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$$

$\tilde{u}_0$:



pro $\tilde{u}_0$ řešíme počáteční úlohu a řešení je rovno

$$u = \chi_F * \tilde{u}_0 = \chi_F * (\tilde{u}_{0J} * \delta_\Sigma) = (\chi_F * \tilde{u}_{0J}) * \delta_\Sigma$$

u: fourierujeme; χ_F: fundamentální řešení; $\tilde{u}_{0J}$: 2 distribuce ze 3 mají kpt. nosič (asociativita platí); δ_Σ: $\lim_{m\to\infty} \sum_{-m}^{m} \delta_m$, kompaktní nosič

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\chi_F)\,\mathcal{F}(\tilde{u}_{0J})\,\mathcal{F}(\delta_\Sigma)$$

$\mathcal{F}(\delta_\Sigma) = \delta_\Sigma$ (Poissonova sumační formule)

→ nosič ve všech celých číslech, v nich vyčíslíme $\mathcal{F}(\chi_F)$ a $\mathcal{F}(\tilde{u}_{0J})$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\mathcal{F}(u_F)(n)}_{e^{-4\pi^2 k^2 n^2 t}} \underbrace{\mathcal{F}(\tilde{u}_{0J})(n)}_{\text{Fourierovy koeficienty fce } \tilde{u}_{0J}} \delta_n(\xi)$$

Fourierovy koeficienty fce $\tilde{u}_{0J}$: $c_n = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u}_{0J}(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$

⇓ odfourierujeme

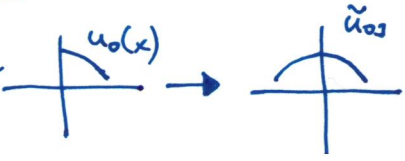
$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 k^2 n^2 t}\, c_n\, e^{2\pi i n x}}$$

Pozn.: Nyní jsme ukázali, jak prodlužovat v případě Dirichletových O.P.

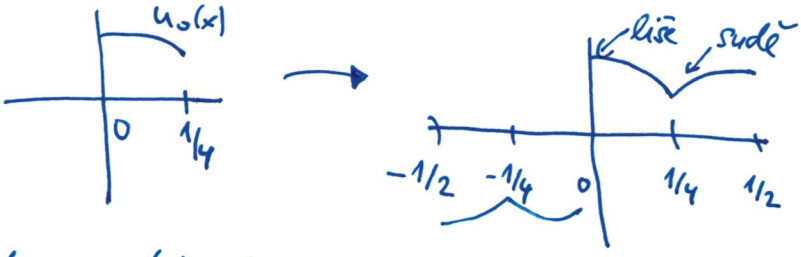
Další případy:

A $u(0,t) = u(\tfrac{1}{2},t) = 0$ … prodlužujeme obojí lichě

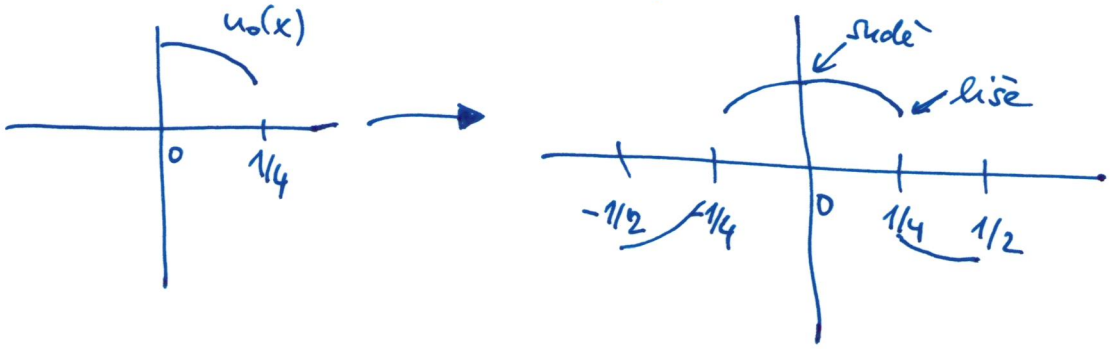
B $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{1}{2},t) = 0$ … prodlužujeme obojí sudě



C $u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{4},t\right) = 0$ ... prodlužujeme lichо-sudě



D $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u\left(\frac{1}{4},t\right) = 0$ ... prodlužujeme sudo-liše

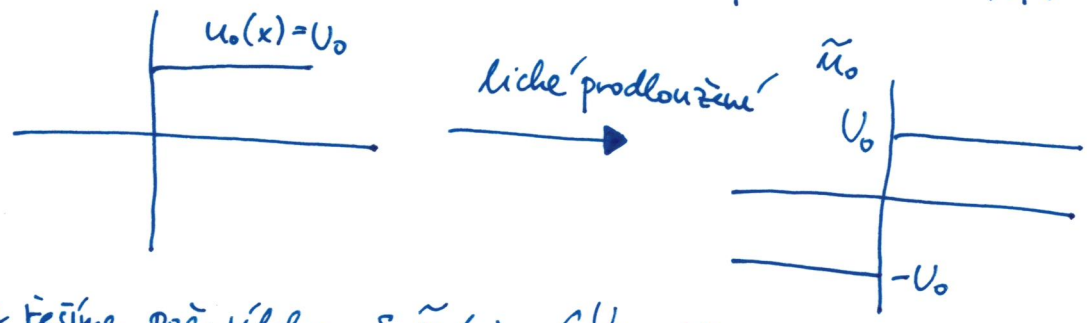


Speciální oblast 3 - úloha na kouli

Úlohu na kouli převedeme na úlohu na úsečce přechodem ke sférickým souřadnicím (viz pozdější příklad).

Př.: Nalezněte řešení RVT na poloprímce

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \Delta u = 0 \qquad \text{na } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$
$$u(0,t) = 0 \qquad t > 0 \qquad \text{D.P.}$$
$$u(x,0) = U_0 = \text{konst.} \quad \text{pro } x > 0 \qquad \text{P.P.}$$



a řešíme poč. úlohu s $\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} U_0 & x > 0 \\ -U_0 & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad u(t,x) = \chi_F * \tilde{u}_0 = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4k^2 t}} \tilde{u}_0(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4k^2 t}} (-U_0)\, d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4k^2 t}} U_0\, d\xi \right] = \left[\begin{matrix} z = \frac{x-\xi}{2k\sqrt{t}} \\ dz = \frac{-d\xi}{2k\sqrt{t}} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \, 2k\sqrt{t} \left(\int_{+\infty}^{\frac{x}{2k\sqrt{t}}} U_0 e^{-z^2} dz - \int_{\frac{x}{2k\sqrt{t}}}^{-\infty} U_0 e^{-z^2} dz \right)$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{2k\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz - \int_{\frac{x}{2k\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right) = \frac{2U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{2k\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = U_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}} \right)!$$

$$\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\frac{x}{2k\sqrt{t}}} - \int_{\frac{x}{2k\sqrt{t}}}^{0} - \int_{0}^{\infty}$$

kde $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$ error function.

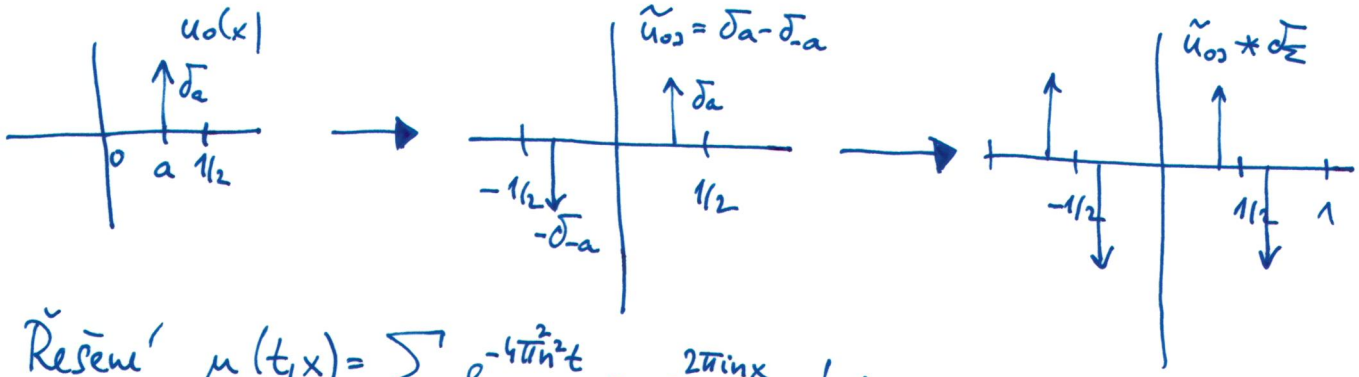
Př.: Nalezněte řešení RVT

a) $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ na $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^+$

↳ O.P. $u(0,t) = u(\frac{1}{2}, t) = 0$

P.P. $u(x,0) = \delta_a(x)$ $\quad a \in (0, 1/2)$

prodlužujeme lichě, abychom zachovali homogenního Dirichleta



Řešení $u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} c_n e^{2\pi i n x}$, kde

$c_n = \mathcal{F}(\tilde{u}_{03})(n) = \mathcal{F}(\delta_a - \delta_{-a})(n) = e^{-2\pi i n a} - e^{2\pi i n a} = -2i \sin(2\pi n a)$.

$$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -2i\, e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin(2\pi n a) (\cos 2\pi n x + i \sin 2\pi n x)$$

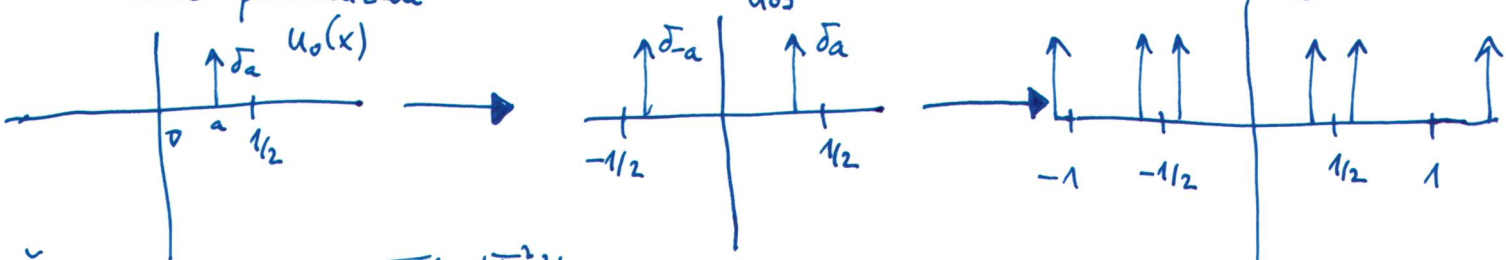
(sudé v n: $\sin(2\pi n a)$; liché v n: $\cos 2\pi n x$; sudé v n: $i \sin 2\pi n x$; liché v n)

$$= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin(2\pi n a) \sin(2\pi n x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} \sin(2\pi n a) \sin(2\pi n x).$$

b) ↳ O.P. $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \frac{1}{2}) = 0$

P.P. $u(x,0) = \delta_a(x)$ $\quad x \in (0, \frac{1}{2})$

↳ sudé prodloužení



Řešení $u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}}{}' e^{-4\pi^2 n^2 t} c_n e^{2\pi i n x}$, $c_n = \mathcal{F}(\tilde{u}_{03})(n) = \mathcal{F}(\delta_a + \delta_{-a}) = e^{-2\pi i n a} + e^{2\pi i n a}$

$= 2\cos(2\pi n a)$.

$$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\, e^{-4\pi^2 n^2 t} \cos(2\pi n a) (\cos 2\pi n x + i \sin 2\pi n x)$$

(sudé v n; sudé v n; sudé v n; liché v n)

$$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} \cos(2\pi n a) \cos(2\pi n x) + 2$$

Př.: Najděte radiálně symetrické řešení úlohy RVT v $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{v } B_{1/2}(0) \times \mathbb{R}^+ \quad (\subset \mathbb{R}^3)$$

O.P. $u(t, \tfrac{1}{2}) = 0$

P.P. $u(0,x) = \chi_{[0,a]}(r)$, $a \in (0, \tfrac{1}{2}) \Leftrightarrow u_0(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le |x| \le a \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Převedeme úlohu na úlohu v jedné prostorové proměnné r

$$\Delta_r v = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) + \underbrace{\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right)\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}}_{\equiv 0 \text{ pro radiálně symetrickou fci}}$$

$v(r,t) := u(|x|,t) \rightarrow \Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv)$

↙ RVT

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) = 0 \quad / \cdot r$$

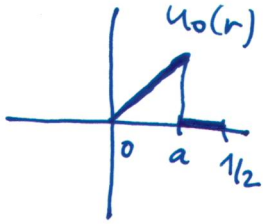
$w(r,t) := rv(r,t)$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0} \quad \text{v } (0, \tfrac{1}{2}) \times \mathbb{R}^+$$

O.P. $w(0,t) = rv(r,t)\big|_{r=0} = 0$

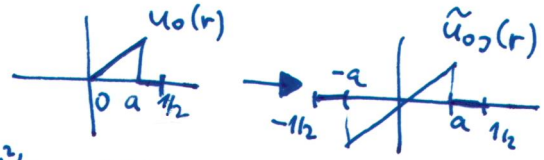
$w(\tfrac{1}{2},t) = rv(r,t)\big|_{r=\frac{1}{2}} = 0$

P.P. $w(r,0) = rv(r,t)\big|_{t=0} = r\chi_{[0,a]}(r)$



Převedli jsme na 1D úsečku.

1) prodloužíme lichě:



$$w(t,r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} c_n e^{2\pi i n r}, \text{ kde } c_n = \mathcal{F}(\tilde{u}_{0,1})(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u}_{0,1}(r) e^{-2\pi i n r}\,dr = \int_0^a r e^{-2\pi i n r}\,dr$$

$$\overset{\text{P.P.}}{=} \left[\frac{1}{(-2\pi i n)} r e^{-2\pi i n r}\right]_{-a}^{a} + \frac{1}{2\pi i n}\int_{-a}^{a} e^{-2\pi i n r}\,dr$$

$$= \frac{1}{(-2\pi i n)} a\left(e^{-2\pi i n a} + e^{2\pi i n a}\right) + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\left(e^{-2\pi i n a} - e^{2\pi i n a}\right)$$

$$= \frac{ia}{n\pi}\cos(2\pi n a) - \frac{i}{2\pi^2 n^2}\sin(2\pi n a)$$

$$\Rightarrow w(t,r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{i}{n\pi}\left(a\cos(2\pi n a) - \frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n a)\right)}_{\text{liché } n} e^{-4\pi^2 n^2 t} \underbrace{\left(\cancel{\cos(2\pi n r)} + i\sin(2\pi n r)\right)}_{\substack{\text{sudé } n \\ \text{sudé } n}} \quad \text{liché } n$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n a) - a\cos(2\pi n a)\right) e^{-4\pi^2 n^2 t}\sin(2\pi n r)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n a) - a\cos(2\pi n a)\right) e^{-4\pi^2 n^2 t}\sin(2\pi n r)$$

$$\Rightarrow v(t,r) = \frac{w(t,r)}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n a) - a\cos(2\pi n a)\right) e^{-4\pi^2 n^2 t}\frac{\sin(2\pi n r)}{r}$$