Domácí úkol 7 Matematická analýza II

Kristián Matúš

1

Najdeme poloměr konvergence. tj.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

takže poloměr je $R = \frac{1}{e}$. Tudíž bude řada konvergovat pro všechny z z kružnice se středem v $S = 2$ a poloměrem $R = \frac{1}{e}$ Vyšetříme nyní chování na kruhu konvergence. To znamená že z budou tvaru $z = 2 + \frac{e^{i\varphi}}{e}$, kde $\varphi \in < 0{,}2\pi)$. 5ešim tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{e^{i\varphi n}}{e^n}$$

Víme že $e^{i\varphi n}$ má omezené částečné součty pro $\varphi \in (0{,}2\pi)$. Použijeme dirichleta. Funkce je jistě od nějakého inexu monotónní. Řešíme tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^n}{n^n e^n \sqrt{2\pi n}} = 0$$

Kde jsme využili Stirlingova vzorce. Vyřešme ještě pro $\varphi = 0$ to je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}$$

Má nezáporné členy, limitně porovnáme ji s řadou $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Řešíme vlastně limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{n!e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^n \sqrt{n}}{n^n e^n \sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

a jelikož řada $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, tak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n}$. Řada tedy konverguje absolutně pro každé z uvnitř kruhu se středem v $S = 2$ a poloměrem $R = \frac{1}{e}$. Konverguje neabsolutně pro každé z na kružnici se středem v $S = 2$ a poloměrem $R = \frac{1}{e}$. Kromě bodu $z = 2 + \frac{1}{e}$. Pro ostatní body diverguje.

2

Jako první si řadu rozepíšu na dvě (což můžu neboť tyto řady jsou očividně absolutně konvergentní).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)}{(n+1)(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)(2n)!}$$

První řada je už od pohledu skoro rozvojem hodnoty cos(1) zde si však ale musíme dát pozor že nesčítáme od nuly ale až od jedničky a jelikož první člen Taylorova rozvoje je 1 získáme tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} = \cos(1) - 1$$

Zadruhé řady uděláme funkci

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(n+1)(2n)!}x^{n+1}=f(x)$$

Je jasné že nás bude zajímat její hodnota v bodě $x=1$. Toto bude v pořádku neboť poloměr konvergence je nekonečný a můžeme tedy aplikovat abelovu větu. Zároveň si všimněme že pro $x=0$ musí být $f(0)=0$. Celou řadu zderivujeme tím získáme

$$f(x)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n)!}\sqrt{x}^{2n}$$

to je však ale Taylorova řada funkce $2\cos(\sqrt{x})-2$. Museli jsme si dát zase pozor na index od kterého sčítáme. Budeme zpětně integrovat (substituce $t=\sqrt{x}$)

$$\int 2\cos\sqrt{x}-2\,dx=\int 4t\cos t-4t\,dt=4t\sin t+4\cos t-2t^2+C=4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}-2x+C=f(x)$$

Z předchozí úvahy o $f(0)$ zjistíme že $C=-4$. A dosadíme za $x=1$. Pak už ale můžeme říct že

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+3)}{(n+1)(2n)!}=\cos(1)-1+4\sin(1)+4\cos(1)-6\approx-0{,}932$$