Domácí úkol 9

Termín odevzdání: 16. 12. 2024 do cvičení

Vyšetřete průběh funkce =

- Najděte definiční obor, limitní chování v nekonečnu (asymptoty) a bodech nespojitosti (pokud existují)
- Speciální vlastnosti funkce (periodicita, sudost/lichost)
- Kořeny, stacionární body, lokální/globální (pokud existují) extrémy, intervaly monotonie, obor hodnot
- Inflexní body, intervaly konvexity a konkávnosti
- Náčrtek grafu (v úkolu nepovinný, ale zkuste si to pro kontrolu vykreslit)

1.)

Vyšetřete průběh funkce:

$$f(x) = xe^{1-x^2}.$$

2.)

Vyšetřete průběh funkce:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right).$$

1.)

Vyšetřete průběh funkce:

$$f(x) = xe^{1-x^2}.$$

Řešení: Nejprve se podíváme na základní vlastnosti funkce. Funkce f je zjevně definována všude na $\mathbb{R}$ a je všude spojitá. Dále snadno ověříme, že se jedná o **lichou funkci**.

$$f(-x) = -xe^{1-(-x)^2} = -xe^{1-x^2} = -f(x)$$

Jelikož, je nám funkce již dána ve tvaru součinu, není problém najít **kořen** $x = 0$, protože exponenciála je vždy kladná. Podívejme se nyní na chování v nekonečnu, exponenciála přebije libovolný polynom proto je limita rovna 0. Rigorózně toho dosáhneme pomocí např. l'Hospitala

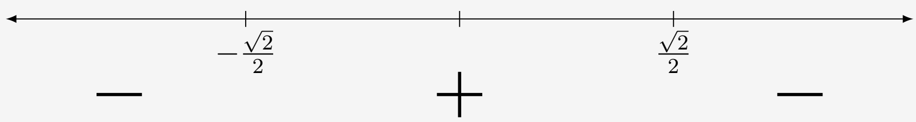
$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} e\frac{x}{e^{x^2}} = e\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0^{\pm}$$

Osa x je tedy také asymptotou funkce f v $\pm\infty$.

Nyní funkci f zderivujme.

$$f'(x) = \left(xe^{1-x^2}\right)' = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

Tato funkce má dva kořeny, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, ve kterých se mění její znaménko ze záporného na kladné a zpátky na záporné.

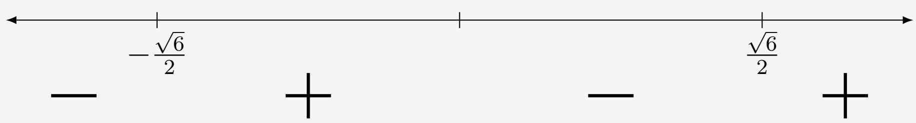


Vidíme, že v bodě $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ je lokální minimum, zatímco v bodě $\frac{\sqrt{2}}{2}$ je lokální maximum.

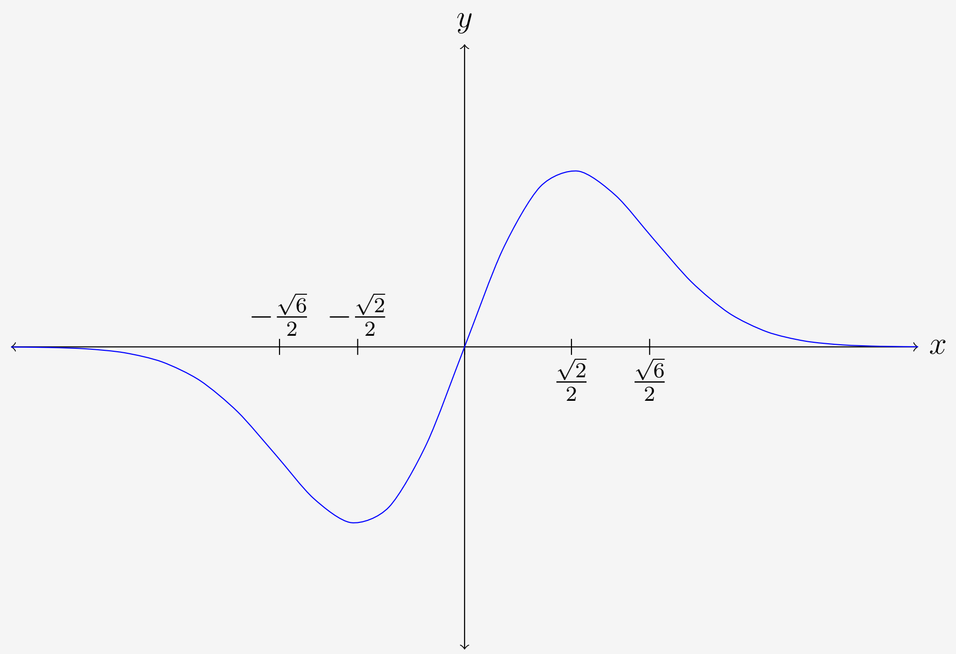
Derivujme funkci podruhé:

$$f''(x) = \left(e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)\right)' = -2xe^{1-x^2} - 4xe^{1-x^2} + 4x^3e^{1-x^2} = 2xe^{1-x^2}\left(2x^2-3\right)$$

Tato funkce má tři kořeny, $x = 0$ a $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, ve kterých mění znaménko.



Nyní jsme připraveni na náčrtek.



$\square$

2.)

Vyšetřete průběh funkce:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right).$$

Řešení: Funkce f je zjevně definována všude na $\mathbb{R}$ kromě bodů ± 1 a tam kde je definována je také spojitá. Dále snadno ověříme, že se jedná o **sudou funkci**.

$$f(-x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-(-x)^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = f(x)$$

Podívejme se na limitu v problémových bodech:

$$\lim_{x\to -1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to -1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

a podobně

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

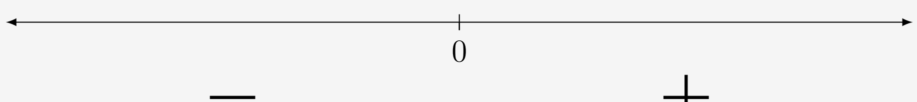
V nekonečnu jsou limity jednoduché:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \operatorname{arctg}(0) = 0$$

Nyní funkci f zderivujme.

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}\frac{-1}{\left(1-x^2\right)^2}(-2x) =$$
$$= \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2+1}$$

Tato funkce má pouze jeden kořen, $x = 0$, a mění v něm znaménko ze záporného na kladné, je zde tedy lokální minimum.



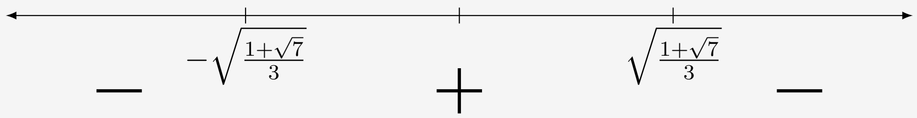
Pro nalezení globálních extrémů stačí zkontrolovat extrémy lokální, případně problémové body nespojitosti nebo nediferencovatelnosti. V tomto případě funkce nenabývá globálního maxima ani minima, pouze se k nim limitně blíží u problémových bodů ± 1.

Zderivujme funkci podruhé.

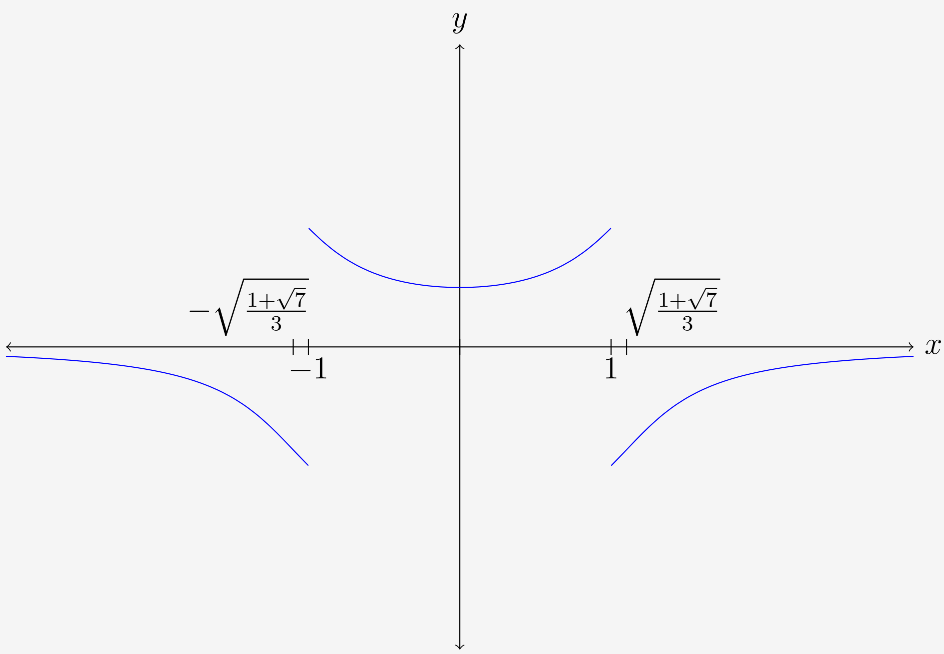
$$f''(x) = \left(\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2+1}\right)' = \frac{2\left(1-x^2\right)^2+2+8x^2\left(1-x^2\right)^2}{\left(\left(1-x^2\right)^2+1\right)^2} =$$

$$= -2\frac{3x^4-2x^2-2}{\left(\left(1-x^2\right)^2+1\right)^2}$$

Vyřešením bikvadratické rovnice substitucí $t = x^2$ dostáváme dva kořeny, $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$.



Nyní jsme připraveni na náčrtek.



□