Domácí úkol 8

Termín odevzdání: 9. 12. 2024 do cvičení

1.)

Najděte limitu posloupnosti, vše řádně zdůvodněte.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

2.)

Najděte limitu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

3.)

Najděte $\limsup_{n\to\infty}$, $\liminf_{n\to\infty}$ a všechny hromadné body posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = n^{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$$

1.)

Najděte limitu posloupnosti, vše řádně zdůvodněte.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Řešení: Zkusme se podívat na limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \left| \begin{array}{c} y = \frac{1}{x} \\ y \to 0^+ \end{array} \right| = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{\sin(y)} =$$
$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} \frac{y}{\sin(y)} = 1$$

Podle Heineho věty nyní plyne, že limita funkce je silnější pojem než limita posloupnosti, tedy platí, že limita naší posloupnosti je nutně rovna limitě funkce spojité proměnné.

□

2.)

Najděte limitu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Řešení: Všimneme si, že jde o teleskopickou posloupnost. Rozepišme si jeden člen a_n.

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{2^2 - 1}{2^2}\right) \cdot \left(\frac{3^2 - 1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)$$

Někde uprostřed tohoto součinu to vypadá následovně

$$\ldots \cdot \left(\frac{(k-1)^2 - 1}{(k-1)^2}\right) \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) \left(\frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2}\right) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot \left(\frac{(k-2)k}{(k-1)^2}\right) \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot \left(\frac{k-2}{k-1}\right) \left(\frac{k+2}{k+1}\right) \cdot \ldots$$

Vidíme, že prostřední činitel se kompletně vykrátil s částmi jeho sousedních činitelů. To platí pro všechny "prostřední"činitele, pouze ti krajní se zkrátí jen částečně.

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Tato limita už je velmi jednoduchá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{2}$$

□

3.)

Najděte $\limsup_{n\to\infty}$, $\liminf_{n\to\infty}$ a všechny hromadné body posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$a_n = n^{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$$

Řešení: K analýze posloupnosti využijeme periodicitu funkce $\cos(x)$. Díky ní může exponent nabývat pouze 3 různých hodnot a to podle zbytku přidělení čísla n čtyřmi.

$$\begin{aligned}
n = 4k &\Rightarrow \cos\left(4k\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\
n = 4k+1 &\Rightarrow \cos\left(4k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
n = 4k+2 &\Rightarrow \cos\left(4k\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1 \\
n = 4k+3 &\Rightarrow \cos\left(4k\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Vidíme, že naši posloupnost můžeme rozdělit na 3 podposloupnosti:

- posloupnost $b_n = n$ pro n dělitelné 4
- posloupnost $c_n = 0$ pro n liché
- posloupnost $d_n = \frac{1}{n}$ pro n sudé ale nedělitelné 4

Najděme nejprve lim sup. Vzpomeňme na definici

$$\limsup_{n\to\infty} = \lim_{k\to\infty} \sup\{a_n\}_{n=k}^{\infty} \geq \lim_{k\to\infty} \sup\{b_n\}_{n=k}^{\infty} = +\infty$$

Podobně pro lim inf:

$$\liminf_{n\to\infty} = \lim_{k\to\infty} \inf\{a_n\}_{n=k}^{\infty} \leq \lim_{k\to\infty} \inf\{d_n\}_{n=k}^{\infty} = 0$$

Hromadné body jsou právě limity našich tří podposloupností $b_n \to \infty$, $c_n \to 1$ a $d_n \to 0$. Je zřejmé, že žádný jiný hromadný bod není.

$\square$