Domácí úkol 7

Termín odevzdání: 2. 12. 2024 do cvičení

1.)

U každého z následujících tvrzení rozhodněte zda je pravdivé či nikoli a vše řádně odůvodněte.

a) $\arccos(x) = O(\sqrt{1-x}), x \to 0$

b) $\arccos(x) = O(\sqrt{1-x}), x \to 1$

c) $\arccos(x) = o(\sqrt{1-x}), x \to 1$

d) $\arccos(x) \sim \sqrt{1-x}, x \to 1$

e) $\arccos(x) \simeq \sqrt{1-x}, x \to 1$

2.)

Najděte limitu (za správných předpokladů smíte použít l'Hospitalovo pravidlo)

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos\big(y^2\big)}{y^2 \sin(y^2)}$$

1.)

U každého z následujících tvrzení rozhodněte zda je pravdivé či nikoli a vše řádně odůvodněte.

a) $\arccos(x) = O(\sqrt{1-x}), x \to 0$

b) $\arccos(x) = O(\sqrt{1-x}), x \to 1^-$

c) $\arccos(x) = o(\sqrt{1-x}), x \to 1^-$

d) $\arccos(x) \sim \sqrt{1-x}, x \to 1^-$

e) $\arccos(x) \simeq \sqrt{1-x}, x \to 1^-$

Řešení: Připomeňme si definice symbolů pro asymptotické chování funkcí f a g kolem bodu $a \in \mathbb{R}$:

- $f(x) = O(g(x)), x \to a \quad \Leftrightarrow_{def} \exists K > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in P_\delta(x) : \big|f(x)\big| \le K\big|g(x)\big|$
- $f(x) = o(g(x)), x \to a \quad \Leftrightarrow_{def} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) \sim g(x), x \to a \quad \Leftrightarrow_{def} \exists C > 0 : \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C$
- $f(x) \simeq g(x), x \to a \quad \Leftrightarrow_{def} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

a) Platí

Uvědomíme si, že obě funkce jsou na okolí bodu 0 spojité, tedy na nějakém okolí 0 také omezené, speciálně platí, že $\arccos(x) \le \pi$ na $(-1, 1)$. Jelikož, má funkce $\sqrt{1-x}$ v 0 nenulovou limitu, ze spojitosti víme, že na nějakém okolí 0 je tato funkce "odražena od nuly", tedy platí

$$\exists \rho \in (0,1), \exists D > 0, \forall x \in U(0,\rho) : \sqrt{1-x} \ge D$$

Nyní stačí vzít $K := \frac{\pi}{D}$ a $\delta = \rho$ a z toho již plyne

$$\forall x \in P_\delta(0) : K\Big|\sqrt{1-x}\Big| \ge \frac{\pi}{D}\sqrt{1-x} \ge \frac{\pi}{D}D = \pi \ge \arccos(x)$$

Takže jsme splnili definici a výrok platí. Konkrétní hodnoty vyhovující nerovnostem jsou například $\rho = \frac{1}{2}$ a $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Platí

Dokážeme, že vlastnost $f(x) \sim g(x)$ implikuje $f(x) = O(g(x))$. Důkaz povedeme přímo. Předpokládejme, že $f(x) \sim g(x), x \to a$, tedy platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Jelikož tato limita existuje, víme že zlomek $\frac{f(x)}{g(x)}$ je definovaný na nějakém okolí a, tedy $g(x) \neq 0$ na tomto okolí (Pozn. čistě teoreticky bychom mohli uvažovat i funkce, jejichž podíl nebude sice všude na okolí a definovaný, ale minimálně bude omezený, tedy pokud povolíme body x_0, ve kterých $g(x_0) = 0$, musí také $f(x_0) = 0$). Z definice limity platí, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P_\delta(a) : \frac{f(x)}{g(x)} \leq C + 1$$

Stačí položit $K = C + 1$ a δ stejné a dostáváme

$$\forall x \in P_\delta(a) : \big|f(x)\big| \leq K\big|g(x)\big|$$

Tuto úlohu tak vyřešíme tak, že dokážeme případ za **d)**

c) Neplatí

Spočtěme limitu

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} = \left| \begin{array}{c} x = \cos(y) \\ y \to 0^+ \end{array} \right| = \lim_{y \to 0^+} \frac{y}{\sqrt{1 - \cos(y)}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y}{\sin(y)} \sqrt{1 + \cos(y)} = \sqrt{2}$$

Vidíme, že tato limita není rovna 0, proto výrok neplatí.

d) Platí

Jelikož nám limita vyšla $\frac{1}{\sqrt{2}}$, což je konečné nenulové číslo, výrok platí.

e) Neplatí

Opět se stačí podívat na výsledek oné limity, ta nevyšla rovna 1, proto výrok neplatí. $\square$

2.)

Najděte limitu (za správných předpokladů smíte použít l'Hospitalovo pravidlo)

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos\big(y^2\big)}{y^2\sin(y^2)}$$

Řešení: Vypočítejme tuto limitu l'Hospitalovým pravidlem. Funkce $1-\cos\big(y^2\big)$ a $y^2\sin\big(y^2\big)$ jsou určitě hladké, a tedy jejich derivace existují na okolí bodu existují. Zároveň obě mají 0 limitu v bodě 0. Zderivujme tedy obě funkce

$$\begin{aligned}
\Big(1-\cos\big(y^2\big)\Big)' &= 2y\sin\big(y^2\big) \\
\Big(y^2\sin\big(y^2\big)\Big)' &= 2y\sin\big(y^2\big) + 2y^3\cos\big(y^2\big) = 2y\left(\sin\big(y^2\big) + y^2\cos\big(y^2\big)\right)
\end{aligned}$$

Poslední předpoklad l'Hospitalova pravidla je na derivaci funkce v jmenovateli a sice, že nesmí být nulová na nějakém okolí limitního bodu. Zde využijeme faktu, že $\sin\big(y^2\big) \geq \frac{1}{2}y^2$ a $\cos\big(y^2\big) \geq \frac{1}{2}$ na nějakém okolí 0. Platí tedy

$$\left|2y\left(\sin\big(y^2\big) + y^2\cos\big(y^2\big)\right)\right| \geq 2|y|\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^2\right) = 2\big|y^3\big| > 0 \qquad \text{na okolí 0 pro } y \neq 0$$

Můžeme tedy zkusit vyšetřit limitu derivací a pokud bude existovat, máme výsledek.

$$\lim_{y\to 0} \frac{2y\sin\big(y^2\big)}{2y\left(\sin(y^2) + y^2\cos(y^2)\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin\big(y^2\big)}{\sin(y^2) + y^2\cos(y^2)}$$

Do tohoto výrazu opět nemůžeme dosadit limitní bod, proto musíme hledat dále. Mohli bychom se opět pokusit použít l'Hospitala, ale počítat derivace je tady zbytečně složité. Zkusme použít klasickou metodu s aritmetikou limit a známou limitou $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{\sin\big(y^2\big)}{\sin(y^2) + y^2\cos(y^2)} &= \lim_{y\to 0} \frac{\sin\big(y^2\big)}{y^2\left(\frac{\sin(y^2)}{y^2} + \cos(y^2)\right)} = \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\sin\big(y^2\big)}{y^2} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(y^2)}{y^2} + \cos(y^2)} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□