Domácí úkol 6

Termín odevzdání: 25. 11. 2024 do cvičení

1.)

Najděte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{x^4+4}\,dx.$$

Hint: K rozkladu jmenovatele na součin využijte komplexní kořeny.

Dále využijte tabulku trikových substitucí:

2.)

Najděte primitivní funkci

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)+2\sqrt{x+1}+1}\,dx.$$

3.)

Uvažujme funkci

$$f(x)=\frac{1}{1-\sin(x)\cos(x)}.$$

Najděte funkci F, která bude primitivní funkcí k f, a bude platit $F(0)=0$. Všimněte si, že funkce F musí být spojitá na celém $\mathbb{R}$. Pokud to tedy bude potřeba, proveďte lepení.

1.)

Najděte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{x^4+4}\,dx.$$

Hint: K rozkladu jmenovatele na součin využijte komplexní kořeny.

Řešení: Vidíme, že integrand je ve tvaru racionální funkce, postupujme podle návodu. Stupeň polynomu v čitateli je v tomto případě rovnou nižší než stupeň polynomu ve jmenovateli. Dělit tedy nemusíme a tudíž rovnou přejdeme na druhý krok. V něm musíme rozložit jmenovatel na součin lineárních polynomů tvaru $(x-k_i)$, kde k_i jsou kořeny daného polynomu, příp na součin nerozložitelných (bez kořene) kvadratických polynomů. Polynom x^4+4 nemá zjevně žádné kořeny nad reálnými čísly, pouze 4 komplexní.

$$\begin{aligned} x^4+4 &= \big(x-(1+i)\big)\big(x-(1-i)\big)\big(x-(-1+i)\big)\big(x-(-1-i)\big) = \\ &= \big(x^2-2x+2\big)\big(x^2+2x+2\big) \end{aligned}$$

Hledaný integrál I je tedy roven

$$I = \int \frac{1}{x^4+4}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}\,dx$$

Dalším krokem je roztrhnout integrál na dva přes parciální zlomky. Víme že bude fungovat ansatz ve tvaru

$$\frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

Zbavíme se zlomků a porovnáme polynomy na obou stranách, jejich koeficienty se musí rovnat.

$$1 = [2B+2D] + x\,[2A+2B+2C-2D] + x^2\,[2A+B-2C+D] + x^3\,[A+C]$$

$$A = -\frac{1}{8} \qquad B = \frac{1}{4} \qquad C = \frac{1}{8} \qquad D = \frac{1}{4}$$

Jsme schopni tedy rozdělit náš integrál na 2.

$$I = \int \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}\,dx$$

Další úpravy vedou na opětovné rozdělení obou integrálů, jednu část vyřešíme přes 1. větu o substituci a druhou přes doplnění na čtverec a tabulkový integrál arctg.

$$I = -\frac{1}{16}\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,dx + \frac{1}{16}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{16}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx + \frac{1}{16}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx =$$
$$= \left|\begin{array}{c} t = x^2-2x+2 \\ dt = (2x-2)\,dx \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} u = x-1 \\ du = dx \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} v = x^2+2x+2 \\ dv = (2x+2)\,dx \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} w = x+1 \\ dw = dx \end{array}\right| =$$
$$= -\frac{1}{16}\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{8}\int \frac{1}{u^2+1} + \frac{1}{16}\int \frac{1}{v}\,dv + \frac{1}{8}\int \frac{1}{w^2+1}\,dw$$

Po zpětné substituci máme výsledek, který je správně definován na celém $\mathbb{R}$.

$$I = \frac{1}{16}\ln\left(\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right|\right) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + C$$

$\square$

2.)

Najděte primitivní funkci

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 2x\left(\sqrt{x+1}+1\right) + 2\sqrt{x+1} + 1}\, dx.$$

Řešení: Integrand je ve tvaru racionální funkce s x a odmocninou $\sqrt{x+1}$. Bude tedy fungovat triková substituce $t = \sqrt{x+1}$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{x^2 + 2x\left(\sqrt{x+1}+1\right) + 2\sqrt{x+1} + 1}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{x+1} \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{\left(t^2-1\right)^2 + 2\left(t^2-1\right)(t+1) + 2t + 1} 2t\,dt = \\
&= \int \frac{2t^5 - 4t^3 + 2t}{t^4 - 2t^2 + 1 + 2t^3 + 2t^2 - 2t - 2 + 2t + 1}\, dt = 2\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^3 + 2t^2}\, dt
\end{aligned}$$

Dostali jsme k integrování racionální funkci, se kterou si již dokážeme poradit. Nejprve vydělíme polynom polynomem, abychom dostali zlomek, kde má čitatel menší stupeň než jmenovatel, a poté tento zlomek rozdělíme na parciální zlomky.

$$I = 2\int t - 2 + \frac{2t^2+1}{t^3+2t^2}\, dt = t^2 - 4t + 2\int \frac{2t^2+1}{t^2(t+2)}\, dt$$

Předpokládejme následující tvar parciálních zlomků:

$$\begin{aligned}
\frac{2t^2+1}{t^2(t+2)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+2} \\
2t^2 + 1 &= 2B + t\left[2A + B\right] + t^2\left[A + C\right] \\
A = -\frac{1}{4} \qquad & B = \frac{1}{2} \qquad C = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
I &= t^2 - 4t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\, dt + \int \frac{1}{t^2}\, dt + \frac{9}{2}\int \frac{1}{t+2}\, dt = t^2 - 4t - \frac{1}{2}\ln\left(|t|\right) - \frac{1}{t} + \frac{9}{2}\ln\left(|t+2|\right) = \\
&= x - 4\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{9}{2}\ln\left(\sqrt{x+1} + 2\right) + C,
\end{aligned}$$

kde generická konstanta C schovala i jednu 1 ze zpětné substituce. □

3.)

Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin(x)\cos(x)}.$$

Najděte funkci F, která bude primitivní funkcí k f, a bude platit $F(0) = 0$. Všimněte si, že funkce F musí být spojitá na celém $\mathbb{R}$. Pokud to tedy bude potřeba, proveďte lepení.

Řešení: V tomto příkladě použijeme jednu z goniometrických substitucí, nejvýhodnější z nich je $t = \operatorname{tg}(x)$ ($t = \sin(x)$ ani $t = \cos(x)$ nefungují a $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ je zbytečně složitá). Hledejme tedy integrál

$$\int \frac{1}{1 - \sin(x)\cos(x)}\, dx = \left| \begin{aligned} t &= \operatorname{tg}(x) \\ \operatorname{arctg}(t) &= x \\ \tfrac{1}{1+t^2}\, dt &= dx \\ \tfrac{t}{1+t^2} &= \sin(x)\cos(x) \end{aligned} \right| = \int \frac{1}{1 - \frac{t}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^2 - t + 1}\, dt = \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dt = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}\, dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dt = \left| \begin{aligned} u &= \tfrac{2}{\sqrt{3}}t - \tfrac{1}{\sqrt{3}} \\ du &= \tfrac{2}{\sqrt{3}}\, dt \end{aligned} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + 1}\, du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(u) + C_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C_k.$$

Vidíme, že výsledná primitivní funkce je nespojitá v bodech nespojitosti funkce $\operatorname{tg}(x)$. Konstanty C_k se mohou lišit na každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Spočtěme jednostranné limity v krizových bodech a určeme závislost jednotlivých konstant tak, aby se limity rovnaly.

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_k$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_{k+1}$$

Tedy

$$C_{k+1} = C_k + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = C_{k-1} + 2\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \ldots = C_0 + (k+1)\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Konstantu C_0 určíme z podmínky $F(0) = 0$.

$$0 = F(0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} + C_0$$

$$C_0 = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

Konečný tvar naší funkce je

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi + k\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi & \text{na } \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ \text{spojitě dodefinována v krajních bodech} & \end{cases}$$

□