Domácí úkol 5

Termín odevzdání: 18. 11. 2024 do cvičení

1.)

Najděte primitivní funkci na maximálním možném intervalu (sjednocení intervalů) a tento interval určete.

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx$$

2.)

Vypočtěte derivaci funkce

$$\sqrt{\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)} + 1}$$

a s pomocí tohoto výsledku najděte primitivní funkci

$$\int -\frac{e^{-2\sin^2(x)}\big(\sin(x)\cos(x)\cosh(2x) + \sinh(2x)\big)}{\cosh^3(2x)\sqrt{\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)} + 1}}\, dx.$$

Hint: Díky první části umíte dobře z integrovat část integrandu, využijte to v per partes.

1.)

Najděte primitivní funkci na maximálním možném intervalu (sjednocení intervalů) a tento interval určete.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx$$

Řešení: Nejprve si rozmyslíme, pro která x je primitivní funkce definována. Výraz v integrandu není definovaný, kdykoli je funkce $\cos(x)$ rovna 0. To nám rozdělí reálná čísla v definičním oboru na jednotlivé intervaly $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Nyní už můžeme řešit samotný integrál. Nejprve (nyní už beztrestně) rozšíříme zlomek výrazem $\cos(x)$.

$$\int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{1-u^2}\,du$$

Nyní buďto využijeme tabulkového integrálu, a nebo postupujeme přes parciální zlomky.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u^2} &= \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} \\ 1 &= A(1-u) + B(1+u) \\ 0 \cdot u + 1 &= (A+B) + u(B-A) \\ A = \frac{1}{2} & \qquad\qquad B = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Využijeme linearitu integrálů a rozdělíme to na 2 integrály.

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{1+u}\,du + \int \frac{\frac{1}{2}}{1-u}\,du = \frac{1}{2}\ln(1+u) - \frac{1}{2}\ln(1-u) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) + C$$

Nakonec si můžeme ověřit, že náš výsledek je definovaný na stejných intervalech. Víme, že hodnota logaritmu ulétává v 0 a v ∞. Tyto dvě podmínky se zde promítnou ve tvaru $\sin(x) \neq 1$ a $\sin(x) \neq -1$. $\square$

2.)

Vypočtěte derivaci funkce

$$\sqrt{\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)}+1}$$

a s pomocí tohoto výsledku najděte primitivní funkci

$$\int -\frac{e^{-2\sin^2(x)}\big(\sin(x)\cos(x)\cosh(2x)+\sinh(2x)\big)}{\cosh^3(2x)\sqrt{\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)}+1}}\,dx.$$

Hint: Díky první části umíte dobře z integrovat část integrandu, využijte to v per partes.

Řešení: Při derivaci využijeme vět o derivování podílu, součinu a složených funkcí.

$$\left(\sqrt{\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)}+1}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)}+1}}\frac{-e^{-\sin^2(x)}\cdot 2\sin(x)\cos(x)\cosh(2x)-e^{-\sin^2(x)}\cdot 2\sinh(2x)}{\cosh^2(2x)} =$$
$$= -\frac{e^{-\sin^2(x)}\big(\sin(x)\cos(x)\cosh(2x)+\sinh(2x)\big)}{\cosh^2(2x)\sqrt{\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)}+1}}$$

Derivaci tedy máme.

Označme hledaný integrál I a zaveďme substituci $f(x)=\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)}$. Rozmyslíme si, že zadaný integrál je všude pěkně definován. Všimneme si, že integrand se nápadně podobá derivaci funkce f. Dokonce platí:

$$I=\int -\frac{e^{-2\sin^2(x)}\big(\sin(x)\cos(x)\cosh(2x)+\sinh(2x)\big)}{\cosh^3(2x)\sqrt{\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)}+1}}\,dx = \int f(x)\left(\sqrt{f(x)+1}\right)'\,dx$$

Nyní jsme hned připraveni na per partes integraci.

$$\int f(x)\left(\sqrt{f(x)+1}\right)\,dx = f(x)\sqrt{f(x)+1}-\int f'(x)\sqrt{f(x)+1}\,dx$$

Integrál, který nám vznikl je zase přesně jako dělaný pro 1. větu o substituci. Vyřešme ho proto následovně:

$$\int f'(x)\sqrt{f(x)+1}\,dx = \left|\begin{array}{c} t=f(x)\\ dt=f'(x)\,dx\end{array}\right| = \int \sqrt{t+1}\,dt = \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

Poslední krok v sobě skryl jednoduchou lineární substituci, třeba $u=t+1$. Nyní již jen provedeme zpětnou substituci a máme výsledek.

$$I=f(x)\sqrt{f(x)+1}-\frac{2}{3}\big(f(x)+1\big)^{\frac{3}{2}}+C=\sqrt{f(x)+1}\left(f(x)-\frac{2}{3}f(x)-\frac{2}{3}\right)+C=$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)}+1}\left(\frac{e^{-\sin^2(x)}}{\cosh(2x)}-2\right)+C$$

□