Domácí úkol 4

Termín odevzdání: 11. 11. 2024 do cvičení

1.)

Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - bx + 2, & x \in (-2, 1) \\ b\,\mathrm{sgn}(x) - c, & \text{jinde na } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Najděte parametry b a c tak, aby f byla spojitá na $\mathbb{R}$.

Poté z definice dokažte, že pro volbu $b = c = 1$ je funkce f nespojitá v 1. (Hint: Znegujte výrok $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in U_\delta(1) : \big|f(x) - f(1)\big| < \varepsilon$ a dokažte ho)

2.)

Dokažte, že (příklady 13. a 15. z 5. sady)

$$\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

a

$$\mathrm{argsinh}(x) = \ln\Big(x + \sqrt{x^2 + 1}\Big).$$

(Hint: využijte definici funkce *sinh* přes exponenciály)

3.)

Určete předpis tečny (lineární funkce) ke grafu funkce

$$g(x) = \frac{x^5 \cos(x)}{2^x}$$

v bodě 1.

1.)

Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - bx + 2, & x \in (-2, 1) \\ b\,\mathrm{sgn}(x) - c, & \text{jinde na } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Najděte parametry b a c tak, aby f byla spojitá na $\mathbb{R}$.

Řešení: Aby byla funkce spojitá na $\mathbb{R}$, musí platit, že v každém bodě existuje její limita a je zároveň rovna její funkční hodnotě. Na intervalech $(-2, 1)$, $(-\infty, -2)$ a $(1, \infty)$ se funkce f rovná polynomům (nebo konstantní funkci), tedy spojitým funkcím, a proto je zde spojitá automaticky. Jediné problémy proto můžou nastat v bodech -2 a 1. Podívejme se na jednostranné limity v těchto bodech.

$$\lim_{x\to -2^-} = b\,\mathrm{sgn}(-2) - c = -b - c \qquad \lim_{x\to -2^+} = (-2)^3 - b(-2) + 2 = 2b - 6$$
$$\lim_{x\to 1^-} = (1)^3 - b(1) + 2 = -b + 3 \qquad \lim_{x\to 1^+} = b\,\mathrm{sgn}(1) - c = b - c$$

Z podmínky na rovnost jednostranných limit dostáváme dvě lineární rovnice o dvou neznámých.

$$-b - c = 2b - 6$$
$$-b + 3 = b - c$$

Jejím vyřešením dostaneme jedinou vyhovující sadu parametrů $b = \frac{9}{5}, c = \frac{3}{5}$. V druhé části máme pro parametry $b = c = 1$ z definice dokázat nespojitost funkce f v bodě 1. Znegujme tedy definici spojitosti:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in U_\delta(1) : \big|f(x) - f(1)\big| < \varepsilon$$
$$\text{Negace:}\ \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \in U_\delta(1) : \big|f(x) - f(1)\big| \geq \varepsilon$$

Víme, že $f(1) = \mathrm{sgn}(1) - 1 = 0$ a že

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^3 - x + 2 = 2$$

Ukažme, že existenčnímu tvrzení vyhovuje např. $\varepsilon = 1$. Chceme tedy ukázat, že

$$\forall \delta > 0\, \exists x \in U_\delta(1) : \big|f(x)\big| \geq 1$$

Definujme $\delta_2 = \min\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{10}\}$. Tento výběr děláme hlavně ze dvou důvodů: platí, že $x = 1 - \delta_2 \in U_\delta(1)$ a zároveň $\delta_2 < 1$ a tedy $\delta_2^n \leq \delta_2$ pro $n \in \mathbb{N}$. Nyní se již jen podívejme na $f(1 - \delta_2)$:

$$f(1-\delta_2) = (1-\delta_2)^3 - (1-\delta_2) + 2 = 1 - 3\delta_2 + \underbrace{3\delta_2^2}_{\geq 0} \underbrace{-\delta_2^3}_{\geq -\delta_2} -1 + \underbrace{\delta_2}_{\geq 0} +2 \geq$$
$$\geq 2 \underbrace{-4\delta_2}_{\geq -\frac{4}{10}} \geq 2 - \frac{4}{10} = \frac{8}{5}$$

Tedy platí, že pro libovolné δ můžeme najít x ve tvaru $x = 1 - \delta_2$, a víme, že splňuje 2 podmínky: $x \in U_\delta(1)$ a $f(x) \geq \frac{8}{5}$. Dokázali jsme negaci spojitosti, proto je funkce f v bodě 1 nespojitá.

□

2.)

Dokažte, že (příklady 13. a 15. z 5. sady)

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

a

$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big).$$

Řešení: Nejprve dokážeme užitečnou identitu.

$$\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) - \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg}(x)$$

Nyní zavedeme substituci $x = \operatorname{tg}(y)$, což je v pořádku, pokud bereme $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, obor hodnot funkce tg je na tomto intervalu celé $\mathbb{R}$. Upravujme výraz pomocí dokázané identity.

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(y)) + \operatorname{arccotg}(\operatorname{tg}(y)) = y + \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - y)) = y + \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2}$$

Pro důkaz druhého vztahu využijeme definici hyperbolického sinu. Tato funkce je na celém $\mathbb{R}$

prostá a její obor hodnot je $\mathbb{R}$, jde o bijekci, speciálně aplikováním funkce sinh na obě strany rovnice je ekvivalentní úprava.

$$\begin{aligned}
\operatorname{argsinh}(x) &= \ln\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big) \\
\sinh\big(\operatorname{argsinh}(x)\big) &= \sinh\Bigg(\ln\Big(x + \sqrt{x^2+1}\Big)\Bigg) \\
x &= \frac{e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}{2} \\
x &= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) \\
x &= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} - \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - (x^2+1)}\right) \\
x &= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2+1}\right) \\
x &= x
\end{aligned}$$

Ekvivalentními úpravami jsme dospěli k pravdivému tvrzení, je tedy jasné, že také naše výchozí rovnice musela být pravdivá.

□

3.)

Určete předpis tečny (lineární funkce) ke grafu funkce

$$g(x) = \frac{x^5 \cos(x)}{2^x}$$

v bodě 1.

Řešení: Nejprve si uvědomíme jak vypadá rovnice tečny v obecném případě. Její směrnice je dána derivací v daném bodě x_0, poté již stačí ji správně posunout tak, aby se funkční hodnota v tečném bodě rovnala funkční hodnotě původní funkce. Je snadné ověřit, že tyto dvě podmínky splňuje lineární rovnice ve tvaru:

$$g'(x_0)(x-1) + g(x_0)$$

V našem případě je $x_0 = 1$ a proto $g(x_0) = g(1) = \frac{\cos(1)}{2}$. Nyní zderivujme funkci g. Použijeme pravidlo o derivování podílu a součinu.

$$\left(\frac{x^5 \cos(x)}{2^x}\right)' = \frac{5x^4 \cos(x) 2^x - x^5 \sin(x) 2^x - \ln(2) x^5 \cos(x) 2^x}{2^{2x}} = \frac{(5x^4 - \ln(2)) \cos(x) - x^5 \sin(x)}{2^x}$$

Dosadíme hodnotu 1 a dostáváme

$$\frac{(5 - \ln(2)) \cos(1) - \sin(1)}{2}.$$

Rovnice tečny tedy vypadá následovně:

$$t(x) = \frac{(5 - \ln(2)) \cos(1) - \sin(1)}{2}(x-1) + \frac{\cos(1)}{2}$$

$\square$