Domácí úkol 3

Termín odevzdání: 30. 10. 2024 do cvičení

1.)

Dokažte, že limita neexistuje

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}$$

2.)

Buď $a > 1$, najděte limitu

$$\lim_{x \to a} \left(\log_x(a)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}}$$

1.)

Dokažte, že limita neexistuje

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\ln(1+x)-\ln(1-x)}$$

Začneme s klasickými úpravami s logaritmy.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\ln\left(1+\frac{1+x}{1-x}-1\right)} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\frac{1+x}{1-x}-1}$$

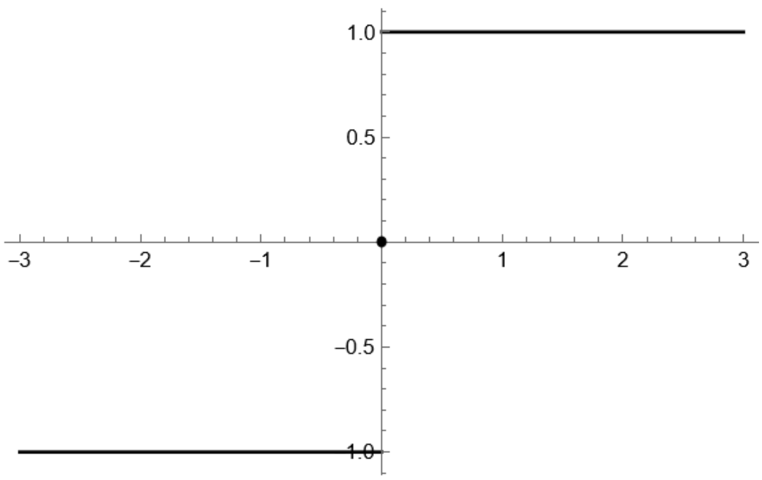
Funkce $\frac{1+x}{1-x}-1$ jde do 0, když x jde do 0, a zároveň je to hezká racionální funkce, která je na okolí 0 prostá (neosciluje). Mohu tak použít větu o aritmetice limit, rozdělit můj součin na součin dvou limit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\ln\left(1+\frac{1+x}{1-x}-1\right)} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\frac{1+x}{1-x}-1}$$

Na první z nich využiji větu o limitě složené funkce (se splněnou podmínkou, že vnitřní funkce neosciluje).

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\ln\left(1+\frac{1+x}{1-x}-1\right)}}_{=1} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\frac{2x}{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{2} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x}$$

Opět využíváme aritmetiku limit, konkrétně větu o limitě součinu. Nyní bychom chtěli dostat x pod odmocninu jako $\sqrt{x^2}$, ale nesmíme zapomenout, že $\sqrt{x^2} = |x|$. Proto je zde vhodné přepsat $x = |x| \operatorname{sgn}(x)$, kde sgn je znaménková funkce, která vrací 1 pro kladná čísla, -1 pro záporná a 0 pro 0.



Obrázek 1: Funkce signum

Dostáváme tak

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}$$

Nyní se podíváme na jednostranné limity zvlášť. Funkce signum tak bude buď $+1$ pokud $x \to 0^+$, nebo -1 pokud $x \to 0^-$. Zároveň opět využijeme větu o limitě složené funkce, kde vnější funkce $\sqrt{y}$ je spojitá a my tak můžeme limitu přesunout dovnitř do argumentu.

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$\frac{1}{2} \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Vidíme, že jednostranné limity se vzájemně nerovnají a proto limita v bodě 0 nemůže existovat.

2.)

Buď $a > 1$, najděte limitu

$$\lim_{x\to a} \left(\log_x(a)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}}$$

Dostali jsme limitu typu "1^∞", klasický postup je přepsat výraz do tvaru s exponenciálou a poté využít její spojitosti a dostat limitu do argumentu.

$$\lim_{x\to a} \left(\log_x(a)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}} = \lim_{x\to a} e^{\frac{\ln(\log_x(a))}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}} = e^{\lim_{x\to a} \frac{\ln(\log_x(a))}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}}$$

Vypočtěme tedy nejprve limitu v argumentu exponenciály. Použijeme známý vzorec pro logaritmy.

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln\left(\frac{\ln(a)}{\ln(x)}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1+\frac{\ln(a)}{\ln(x)}-1\right)}{\frac{\ln(a)}{\ln(x)}-1} \frac{\frac{\ln(a)}{\ln(x)}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1+\frac{\ln(a)}{\ln(x)}-1\right)}{\frac{\ln(a)}{\ln(x)}-1}}_{=1 \text{ z věty o limitě složené funkce}} \lim_{x\to a} \frac{\frac{\ln(a)}{\ln(x)}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

Pokračujeme dále s úpravami logaritmů.

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{\ln(a)}{\ln(x)}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\ln(x)} \frac{\ln(a)-\ln(x)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\ln(x)} \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

Opět máme v čitateli přirozený logaritmus výrazu, který jde k 1, uděláme klasický trik přičtením a odečtením 1. Zároveň rozšíříme výrazem $\sqrt{x}+\sqrt{a}$, abychom se zbavili odmocnin ve jmenovateli.

$$\frac{1}{\ln(a)} \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}-1\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}-1\right)}{\frac{a}{x}-1} \frac{\frac{a}{x}-1}{x-a} \left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$$

Rozdělíme:

$$\frac{1}{\ln(a)} \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}-1\right)}{\frac{a}{x}-1}}_{=1 \text{ složená limita}} \lim_{x\to a} \frac{\frac{a}{x}-1}{x-a} \underbrace{\lim_{x\to a} \left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}_{=2\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{\ln(a)} \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{1}{x}\frac{a-x}{x-a}}_{=-\frac{1}{a}} = -\frac{2}{\sqrt{a}\ln(a)}$$

Proto je výsledná limita rovna

$$\lim_{x\to a} \left(\log_x(a)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}} = e^{-\frac{2}{\sqrt{a}\ln(a)}}$$