Domácí úkol 1

Termín odevzdání: 14. 10. 2024 do cvičení

1.)

Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, která splňují

$$z^4 + 1 = i.$$

2.)

Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{n} < 2\sqrt{n}$$

3.)

Najděte takové množiny A a B reálných čísel, aby platily všechny následující podmínky najednou:

- $\inf A = 1$
- $\inf B = 1$
- $\inf(A \cap B) = 2$
- $\sup A = 10$
- $\sup(A \cup B) = 15$
- $\max(A \setminus B) = 5$
- $\max B$ existuje
- $\max A, \min A, \min B, \min(A \cap B)$ neexistují

Řešení

1.)

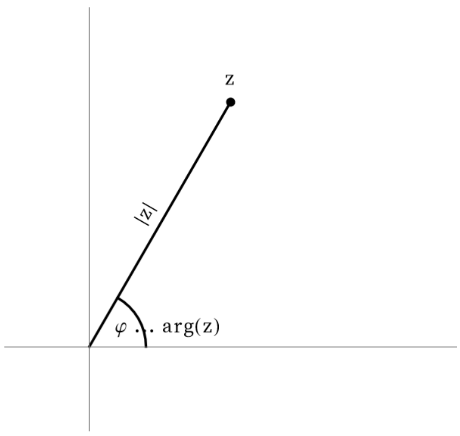
Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, která splňují

$$z^4 + 1 = i.$$

Rovnici přepíšeme do tvaru

$$z^4 = -1 + i.$$

Pokud je $z \in \mathbb{C}$, pak také $z^4 \in \mathbb{C}$. Musíme tedy vyřešit, kdy platí rovnost dvou komplexních čísel. Ta jsou charakterizována svou velikostí a argumentem, obě hodnoty musí být v případě rovnosti stejné.



Obrázek 1: Komplexní číslo (ilustrativní obrázek)

Proto musí platit

$$\left|z^4\right| = |-1 + i| \tag{1}$$
$$\arg(z^4) = \arg(-1 + i). \tag{2}$$

Nyní využijeme vlastnosti násobení dokázané na cvičení (1. sada, 3 e), f)), připomeňme:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{3. e)}$$
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \tag{3. f)}$$

Rovnice (1) nám dává

$$\left|z^4\right| \underbrace{= |z|^4}_{\text{podle (3. e))}} = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Proto

$$|z| = \sqrt[8]{2}$$

Z rovnice (2) vyčteme

$$\arg(z^4) \underbrace{= 4\arg(z)}_{\text{podle (3. f))}} = \arg(-1 + i) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) \underbrace{+\pi}_{\text{2. kvadrant}} = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$$

Po vydělení rovnice 4 dostaneme

$$\arg(z) = \frac{3\pi}{16}$$

Samozřejmě musíme držet v paměti, že hledáme 4 řešení (protože řešíme polynomiální rovnici 4. řádu). Ty ostatní najdeme uvažováním

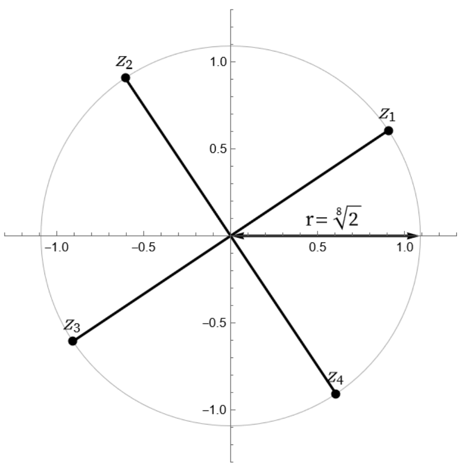
$$\arg(-1+i) + 2k\pi \qquad\qquad \text{pro } k \in \{1,2,3\}$$

Tedy

$$\arg(z_2) = \frac{1}{4}(\frac{3}{4}\pi + 2\pi) = \frac{11\pi}{16}$$
$$\arg(z_3) = \frac{1}{4}(\frac{3}{4}\pi + 4\pi) = \frac{19\pi}{16}$$
$$\arg(z_4) = \frac{1}{4}(\frac{3}{4}\pi + 6\pi) = \frac{27\pi}{16}$$

Všechna řešení pak můžeme zapsat v goniometrickém tvaru:

$$z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) + i\,\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right) \approx 0.9067 + 0.6059i$$
$$z_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) + i\,\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)\right) \approx -0.6059 + 0.9067i$$
$$z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{16}\right) + i\,\sin\left(\frac{19\pi}{16}\right)\right) \approx -0.9067 - 0.6059i$$
$$z_4 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{27\pi}{16}\right) + i\,\sin\left(\frac{27\pi}{16}\right)\right) \approx 0.6059 - 0.9067i$$



Obrázek 2: Všechny 4 kořeny

2.)

Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{n} < 2\sqrt{n}$$

Nejprve se podíváme zdali tvrzení platí pro 1:

$$1 = \frac{\sqrt{1}}{1} < 2\sqrt{1} = 2. \qquad (\checkmark)$$

Nyní budeme předpokládat (tzv. indukční předpoklad, zn. **IP**), že nerovnost ze zadání platí pro n, a dokážeme, že pak musí platit stejná nerovnost také pro $n+1$:

$$\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} < 2\sqrt{n+1} \qquad \text{- chceme dokázat}$$

Pro levou stranu nerovnice platí:

$$\underbrace{\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{n}}_{<2\sqrt{n} \text{ podle IP}} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} < 2\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

Pokud dokážeme, že

$$2\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} < 2\sqrt{n+1},$$

jsme hotovi. Začněme tedy upravovat.

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} &< 2\sqrt{n+1} \\
2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &< 2\sqrt{n+1} \\
\frac{1}{\sqrt{n+1}} &< 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \\
\frac{1}{\sqrt{n+1}} &< 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\
\frac{1}{\sqrt{n+1}} &< 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
\frac{1}{\sqrt{n+1}} &< 2\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
\sqrt{n+1} + \sqrt{n} &< 2\sqrt{n+1} \\
\sqrt{n} &< \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

To zjevně pro přirozené n platí. Tím jsme dokázali indukční implikaci $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ a výrok tedy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

3.)

Nejprve se podíváme na "spodní"části daných množin. Potřebujeme, aby obě měly stejné infimum, ale jejich průnik měl infimum odlišné. To zajistíme tak, že tyto množiny budou u 1 disjunktní, např. množiny $X = \{1, 2\}$, $Y = (1, 2]$ splňují přesně danou podmínku $\inf X = \inf Y = 1$ a $\inf(X \cap Y) = 2$. Klíčem je především ta disjunktivita, infimum průniku nemusí s infimy původních množin vůbec souviset (viz 2. sada 14.).

Zadání nám však zakazuje, aby naše množiny měly minimum (tedy příklad X je v našem případě nepoužitelný). Musíme vymyslet dvě množiny které se svými prvky blíží k 1 ale jsou disjunktní. Jednoduchý příklad takovýchto množin je třeba

$$A_1 = \{1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, \ldots\}$$
$$B_1 = \{1.2, 1.02, 1.002, 1.0002, \ldots\}.$$

Zbytek podmínek je už vcelku snadný, stačí správně navolit intervaly. Zaprvé do obou množin přidejme interval $(2, 3)$, tak bude průnik mít to správné infimum bez minima.

$$A_2 = (2, 3)$$
$$B_2 = (2, 3)$$

Dále do A přidejme interval

$$A_3 = (4, 10),$$

aby obsahovala číslo 5 a její supremum bylo 10 (ale maximum ne). Množina B pak číslo 5 obsahovat nesmí. Dále vidíme, že $\sup(A \cup B) = 15$. K vyřešení této podmínky musíme dokázat vcelku intuitivní tvrzení:

Tvrzení 1. *Nechť A a B jsou neprázdné shora omezené množiny reálných čísel, pak platí*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \tag{3}$$

Důkaz. Tvrzení je velmi jednoduché. Bez újmy na obecnosti (BÚNO) předpokládejme, že $\sup A \geq \sup B$. Pak $\sup A$ je určitě horní závorou sjednocení $A \cup B$. Platí

$$\forall x \in A \cup B : \ x \leq \sup A$$

Dále z definice víme, že platí

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists x_0 \in A : \ x > \sup A - \varepsilon$$

Pokud takové x_0 umíme najít v A, tím spíš ho umíme najít také v $A \cup B$. Platí tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists x_0 \in A \cup B : \ x > \sup A - \varepsilon$$

Máme splněny obě charakteristické podmínky pro supremum, proto $\sup(A \cup B) = \sup A$.

□

Z toho již jednoznačně plyne, že supremum (a tedy i maximum) množiny B je 15. Přidejme tedy

$$B_3 = (5, 15]$$

Nyní stačí vzít množiny A a B jako

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$
$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$