

Funkce komplexní proměnné

Komplexní logaritmus, obecná mocnina

1. Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:

a) $\ln(-1)$ b) $\ln i$ c) $\ln(-2 + 3i)$.

2. Najděte všechny hodnoty následujících funkcí:

a) $1^{\sqrt{2}}$ b) 2^i c) $(3 + 4i)^{1+i}$.

Počáteční hodnota $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ je pro $z = 2$ rovna 0. Bod z proběhne kružnici se středem v počátku a poloměru 2 v kladném směru, $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ závisí spojitě na z . S jakou hodnotou se vrátí $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ zpět do bodu $z = 2$?

3. $f(z) = \sqrt[3]{z-1}$

4. $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

5. $f(z) = 2 \ln z$

6. $f(z) = \ln z + \ln(z+1)$

Spočítejte následující křivkové integrály:

7. $\int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polorovinu, $\sqrt{1} = 1$

8. $\int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polorovinu, $\sqrt{1} = -1$

9. $\int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes dolní polorovinu, $\sqrt{1} = 1$

10. $\int_{\varphi} \ln z dz$, φ je kružnice $|z| = 1$, $\ln 1 = 0$

11. $\int_{\varphi} \ln z \, dz$, φ je kružnice $|z| = 1$, $\ln i = \frac{\pi i}{2}$

12. $\int_{\varphi} \ln z \, dz$, φ je kružnice $|z| = R$, $\ln 1 = 2\pi i$

13. Vypočtete

a) $\int_0^{\infty} x^{s-1} \cos x \, dx$

b) $\int_0^{\infty} x^{s-1} \sin x \, dx$

v Newtonově smyslu, je-li $0 < s < 1$.

14. Následující funkce rozložte v okolí příslušného bodu do mocninné řady a určete poloměr konvergence

a) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1$

b) $f(z) = \ln^2(1 - z)$, $z_0 = 0$

Komplexní logaritmus, obecná mocnina

Přirozené zavedení: Pro $z = r e^{i\varphi}$ je $\ln z = \ln r + i\varphi$

Problém: toto je víceznačná fce, protože φ není určeno jednoznačně!

Řešení: omezit φ na interval délky 2π , např. $(-\pi, \pi)$ nebo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ atp.

Pro kladná reálná x je pak $\ln x$ standardní logaritmus, může však být i $\ln x + 2k\pi i$ pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$.

Obecná mocnina: $z^w := e^{w \log z}$, závisí tedy na větvi logaritmu.

Větve $\ln z$ jsou spojité na oblastech bez příslušných polopřímek (např. pro $(-\pi, \pi)$ je to $\mathbb{C} \setminus \{t, t \in \mathbb{R}\}$)

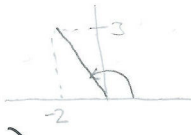
Dobře jsou holomorfní a platí $(\ln z)' = \frac{1}{z}$. Je potřeba dávat pozor při přechodu polopřímek nespojitosti. Obecně neplatí $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, jen

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i$$

1, a) $\ln(-1) = \ln(e^{i\pi}) = i\pi + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

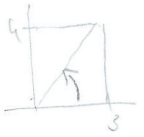
b) $\ln(i) = \ln(e^{i\pi/2}) = i\pi/2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

c) $\ln(-2+3i) = \ln(\sqrt{13} e^{i\alpha}) = \frac{1}{2} \ln 13 + i(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{2}{3} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$



2, a) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot \ln(e^{i0})} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(\sqrt{2} \cdot 2k\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

b) $2^i = e^{i \ln 2} = e^{i \cdot \ln(2e^{i0})} = e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{-2k\pi} \cdot (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2), k \in \mathbb{Z}$



c) $(3+4i)^{1+i} = \exp[(1+i)\ln(3+4i)] = \exp[(1+i) \cdot (\ln 5 + i \arctg \frac{4}{3} + 2k\pi i)]$
 $= 5 \cdot e^{-\arctg \frac{4}{3}} \cdot e^{-2k\pi} \cdot [\sin(\ln 5 + \arctg \frac{4}{3}) + i \cos(\ln 5 + \arctg \frac{4}{3})], k \in \mathbb{Z}$

3) $f(z) = (z-1)^{1/3} = \exp[\frac{1}{3} \ln(z-1)] = \exp[\frac{1}{3} \ln|z-1|] \cdot e^{i \frac{1}{3} \text{Arg}(z-1)}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \text{Arg}(z-1) = \text{Arg} f(z)$ $z = 2e^{it}, t \in (0, 2\pi)$ $\text{Arg}(2e^{it} - 1)$ bychom asi byli schopni vyjádřit jako fci od t , ale nebude to potřeba. Stačí si uvědomit, že je-li $\text{Arg}(2e^{i0} - 1) = 0$

pak pro $t \rightarrow 2\pi$ bude $\text{Arg}(2e^{it} - 1) \rightarrow 2\pi$ a proto $\text{Arg} f(z) \rightarrow \frac{2\pi}{3}$

Známe-li $\text{Arg} f(z)$, pak $\ln f(z) = e^{\text{Arg} f(z)} \cdot \cos \text{Arg} f(z)$

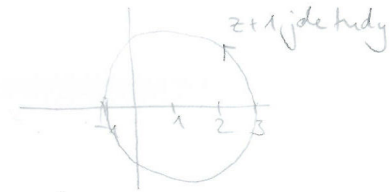
4) $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} = \exp[\frac{1}{2} \ln \frac{z-1}{z+1}] \Rightarrow$ zajímavá máš $\frac{1}{2} \text{Arg} \frac{z-1}{z+1}$

Zde už vyjádříme $\frac{z-1}{z+1} \Big|_{z=2e^{it}} = \frac{2\cos t - 1 + 2i\sin t}{2\cos t + 1 + 2i\sin t} = \frac{(4\cos^2 t - 1) + 4i\sin t}{5 + 4\cos t} = \frac{3 + 4i\sin t}{5 + 4\cos t}$
 $= \frac{\sqrt{9+16\sin^2 t}}{5+4\cos t} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{9+16\sin^2 t}} + i \frac{4\sin t}{\sqrt{9+16\sin^2 t}} \right)$

$\Rightarrow \cos \text{Arg} \frac{z-1}{z+1} = \frac{3}{\sqrt{9+16\sin^2 t}}$ $t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \cos \text{Arg} \frac{z-1}{z+1}$ stáhne se 1, dojde do $\frac{3}{5}$ ($t = \frac{\pi}{2}$) a vrátí se do 1 ($t = \pi$),
pak ještě jichan $\Rightarrow \text{Arg} \frac{z-1}{z+1}$ se nemůže dostat jinam než do 0 $\Rightarrow \frac{1}{2} \text{Arg} \frac{z-1}{z+1} = 0$

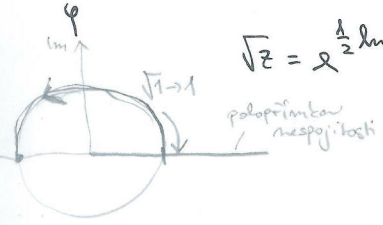
5) $f(z) = 2 \ln z \quad |z = 2e^{it} \Rightarrow \tilde{f}(t) = 2 \ln(2e^{it}) = 2(\ln 2 + it) = 2 \ln 2 + 2it$
 t jde od 0 do 2π spojitě $\Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = 4\pi$ pro $t \rightarrow 2\pi$.

6) $f(z) = \ln z + \ln(z+1) \quad |z = 2e^{it} \Rightarrow \tilde{f}(t) = \ln 2 + it + \ln(1+2e^{it})$
 $z+1$ projde za počátkem, tedy taky nabere dá 2π , stejně jako z
 ($z+3$ by ale dalo nulu, protože by prošlo před počátkem)
 např. $\Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = 4\pi$ pro $t \rightarrow 2\pi$



Šlo by zjistit i z vyjádření $\ln(1+2e^{it}) = \ln \sqrt{5+4\cos t} + iA(t)$, kde $\cos A(t) = \frac{1+2e^{i\cos t}}{\sqrt{5+4\cos t}}$
 $\sin A(t) = \frac{2\sin t}{\sqrt{5+4\cos t}}$
 a navíc, že aby $A(t)$ byla spojitá, musí stejně jako t dojít do 2π .

7) $\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \quad \varphi(t) = e^{it}, t \in (0, \pi), \sqrt{1} = 1$

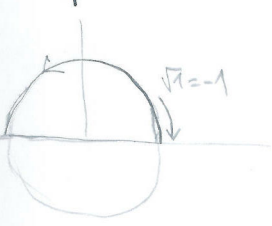


$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \ln z} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln |z| + i \frac{1}{2} \operatorname{Arg} z\right)$ V bodě $1 = 1 + 0i$ chceme $\sqrt{1} = 1$
 $\Rightarrow \exp\left(i \frac{\operatorname{Arg} z}{2}\right) = 1$
 $\Rightarrow \frac{\operatorname{Arg} z}{2} = 0 + 2k\pi$
 Zvolíme např. $k=0$.

$\frac{\operatorname{Arg} z}{2}$ tak startuje z nuly pro $t=0$ a skončí
 v $\frac{\pi}{2}$ pro $t=\pi$.

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it/2}} = i \int_0^{\pi} e^{it/2} dt = i \cdot \frac{2}{i} \left[e^{it/2} \right]_0^{\pi} = 2 \cdot (e^{i\pi/2} - e^0) = 2 \cdot (i-1)$$

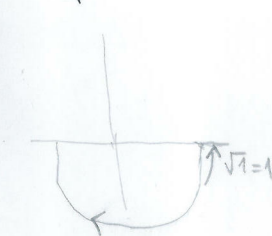
8) $\int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \varphi(t) = e^{it}, t \in (0, \pi), \sqrt{1} = -1$



Opět $\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln |z| + i \frac{1}{2} \operatorname{Arg} z\right)$ chceme $\sqrt{1} = -1$
 tj. $\exp\left(i \frac{\operatorname{Arg} z}{2}\right) = -1$
 $\frac{\operatorname{Arg} z}{2} = \pi + 2k\pi$
 $\frac{\operatorname{Arg} z}{2}$ tak startuje z hodnoty π pro $t=0$
 a skončí v hodnotě $\frac{3}{2}\pi$ pro $t=\pi$

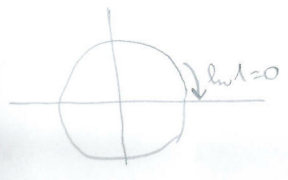
Proto $\int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{i(\pi+t/2)}} = \frac{i}{e^{i\pi}} \int_0^{\pi} e^{it/2} dt = -i \frac{2}{i} \left[e^{it/2} \right]_0^{\pi} = -2 \cdot (i-1)$

9) $\int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \varphi(t) = e^{it}, t \in (2\pi, \pi), \sqrt{1} = 1$. Stejně jako dříve $\frac{\operatorname{Arg} z}{2} = 0 + 2k\pi$



$\frac{\operatorname{Arg} z}{2}$ startuje z hodnoty 0 pro $t=2\pi$, proto $\sqrt{z} = e^{i(\pi+t/2)}$, aby $t=2\pi$ dalo $e^{i\pi} = 1$
 $\int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{2\pi}^{\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{i(\pi+t/2)}} = -i \int_{2\pi}^{\pi} e^{it/2} dt = i \int_{\pi}^{2\pi} e^{it/2} dt = 2 \left[e^{it/2} \right]_{\pi}^{2\pi} = 2 \cdot (-1-i)$

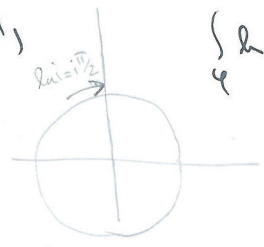
10) $\int_{\varphi} \ln z$ $\varphi(t) = e^{it}, t \in (0, 2\pi), \ln 1 = 0$



$\ln z = \ln|z| + i \text{Arg} z$. Chceme $\ln 1 = 0$, proto $\text{Arg} z = 0$ pro $t=0$.

Proto $\int_{\varphi} \ln z = \int_0^{2\pi} it \cdot ie^{it} dt = - \int_0^{2\pi} t e^{it} dt = - \left(\left[t \cdot \frac{e^{it}}{i} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} e^{it} dt \right)$
 $= - \frac{2\pi}{i} + \frac{1}{i} \cdot \left[\frac{e^{it}}{i} \right]_0^{2\pi} = \underline{2\pi i}$

11)



$\int_{\varphi} \ln z$. Zvoleny bod k urceni vetve logaritmu nas vede k parametrizaci $t \in (\pi/2, 5\pi/2), \varphi(t) = e^{it}$

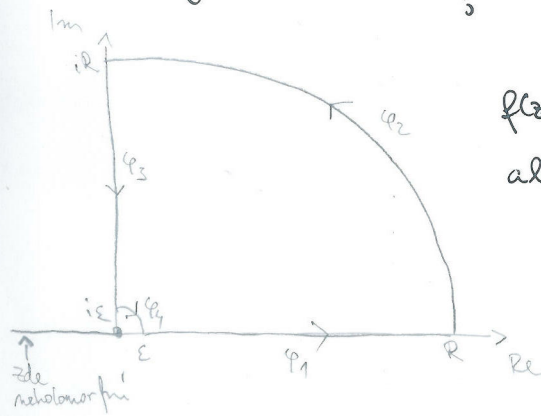
$\ln z = \ln|z| + i \text{Arg} z, \ln i = i \pi/2$
 $\Rightarrow \text{Arg} z = \pi/2$ pro $t = \pi/2$ OK.

$\int_{\varphi} \ln z = \int_{\pi/2}^{5\pi/2} it \cdot ie^{it} dt = - \int_{\pi/2}^{5\pi/2} t e^{it} dt$
 $= - \left(\left[\frac{t}{i} e^{it} \right]_{\pi/2}^{5\pi/2} - \frac{1}{i} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} e^{it} dt \right) = - \frac{5\pi}{2i} \cdot i + \frac{\pi}{2i} \cdot i + \frac{1}{i} \left[\frac{e^{it}}{i} \right]_{\pi/2}^{5\pi/2} = \underline{-2\pi}$

12) DU

13) $\int_0^{\infty} x^{s-1} \cos x dx$

$\int_0^{\infty} x^{s-1} \sin x dx$ $s \in (0, 1)$
 Pro oboji spočítáme $\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{ix} dx$ jako $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\epsilon}^R x^{s-1} e^{ix} dx$



$f(z) = z^{s-1} e^z$ z^{s-1} je holomorfní mimo polopřímku $t \leq 0$
 ale naše oblast je mimo \Rightarrow Cauchyho veta, $\int_{\varphi} f(z) dz = 0$

chceme $\int_{\varphi_1} f(z) dz = \int_{\epsilon}^R (e^{it})^{s-1} \cdot R^{s-1} \cdot e^{i(Rt)} \cdot i R e^{it} dt$
 $= R^s i \int_0^{\pi/2} (e^{it})^s e^{i(Rt)} dt = R^s i \int_0^{\pi/2} e^{i(st+Rcost+iR sint)} dt$
 $= R^s i \int_0^{\pi/2} e^{-R sint} \cdot e^{i(st+Rcost)} dt$

Pozorování: $|e^{i(st+Rcost)}| = 1 \Rightarrow \left| \int_{\varphi_2} f(z) dz \right| \leq R^s \int_0^{\pi/2} e^{-R sint} dt \leq R^s \int_0^{\pi/2} e^{-R \cdot \frac{2t}{\pi}} dt = \frac{\pi R^{s-1}}{2} (1 - e^{-R})$
 $\rightarrow 0$ pro $R \rightarrow +\infty$ protože $s < 1$!

$\int_{\varphi_3} f(z) dz = \int_R^{\epsilon} i^{s-1} t^{s-1} e^{-t} idt = -i^s \int_{\epsilon}^R t^{s-1} e^{-t} dt = -e^{-\epsilon} \cdot \ln i \int_{\epsilon}^R t^{s-1} e^{-t} dt$ $\ln i = i \pi/2$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_3} f(z) dz = -e^{i \pi/2} \cdot \Gamma(s)$, protože $\int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt =: \Gamma(s)$

$\int f(z) dz$ dle Tvzení 6 z příkladu 6 z předchozí série.

φ_4

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \cdot z = \lim_{z \rightarrow 0} z^s \cdot e^{iz} = 0 \quad z^s \rightarrow 0, e^{iz} \text{ omezená}$$

$$\Rightarrow A=0, b=\frac{\pi}{2} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi_4} f(z) dz = -iAb = 0$$

... opačný směr prodloužení

Celkem tedy $\int_0^\infty z^{s-1} e^{iz} dz = e^{i\frac{\pi}{2}s} \cdot \Gamma(s)$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x^{s-1} \cos x dx = \operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{2}s} \Gamma(s)) = \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(s)$$

$$\int_0^\infty x^{s-1} \sin x dx = \operatorname{Im}(e^{i\frac{\pi}{2}s} \Gamma(s)) = \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(s)$$

14) Prísle