

Funkce komplexní proměnné

Křivkový integrál

Spočtete následující křivkové integrály:

1. $\int_{\varphi} z \, dz$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu $(1, 0)$ do $(-1, 0)$ přes horní polorovinu.
2. $\int_{\varphi} (z - a)^n \, dz$, φ je kladně orientovaná kružnice $|z - a| = R$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$.
3. $\int_{\varphi} |z| \, dz$, φ je průvodič bodu $2 - i$.
4. $\int_{\varphi} \frac{z}{\bar{z}} \, dz$, φ je kladně orientovaný obvod horního mezikruží se středem v počátku a poloměry 1 a 2.
5. Jakých hodnot může nabývat $\int_{\varphi} \frac{dz}{z^2 + 9}$, je-li φ uzavřená křivka, která neprochází body $\pm 3i$.
6. Vypočtete $\int_{\varphi} \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$, je-li φ kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu
 - a) 1
 - b) 0
 - c) -1
7. Vypočtete $\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{e^z \, dz}{z(z - 1)^3}$, je-li φ kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu
 - a) -1
 - b) 2
 - c) $\frac{1}{2}$
8. Vypočtete $\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{e^z \, dz}{z^2 + a^2}$, je-li $\varphi: 2ae^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

Cauchyova věta

1. Vypočtete integrál $I = \int_{\varphi} |z| \bar{z} dz$, kde φ je záporně orientovaný obvod jednotkového polokruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
2. Vypočtete $I = \int_C \frac{ze^z dz}{z^2+4}$, kde C je kladně proběhnutá kružnice o středu $2i$ a poloměru 2 .
3. Spočtete
 - a) $\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz$
 - b) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz$.
4. Spočtete $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, je-li C kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu 2 .
5. Nechť funkce $f(z)$ je regulární v pásu $-a < \operatorname{Im} z < a$ a vyhovuje podmínce $f(z) \rightarrow 0$ když $z \rightarrow \infty$, $-a < \operatorname{Im} z < a$. Dokažte, že když $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konverguje, pak pro každé $\alpha \in (-a, a)$ integrál $\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(x) dx$ také konverguje a jeho hodnota nezávisí na α .
6. Dokažte:
Je-li f spojitá v oblasti $0 < |z-a| \leq r_0$, $0 \leq \arg(z-a) \leq b$, kde $r_0 > 0$, $0 < b \leq 2\pi$ a existuje-li vlastní limita $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = A$, potom $\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{C_r} f(z) dz = iAb$, kde C_r je kladně proběhnutý oblouk kružnice $|z-a| = r$, vyřatý úhlem $0 \leq \arg(z-a) \leq b$.
7. Spočtete (použijte předchozí příklad)
 - a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
 - b) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL V $\mathbb{C}$

Křivka: zobrazení $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, regulární, je-li $\varphi'(t) \neq 0$ na $[a, b]$

Jednoduchá křivka: φ je prostá na (a, b) a na $(a, b]$ a φ' spojitá na obrazu (a, b)

Uzavřená křivka: $\varphi(a) = \varphi(b)$

Jordanova křivka: jednoduchá + uzavřená

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, pak $\int_{\varphi} f(z) dz := \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, jestliže PS existuje jako Lebesgueův integrál

$L_{\varphi} := \int_a^b |\varphi'(t)| dt$... délka křivky

Vnímáme-li $\mathbb{C}$ jako $\mathbb{R}^2$, je f vektorová fce a $\int_{\varphi} f(z) dz$ je vlastně křivkový integrál 2. druhu.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, f, F jsou definované na Ω . Je-li $F'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$, pak F je primitivní fce k f na Ω .

Věta: $\Omega \subset \mathbb{C}$ otev., f spojitá na Ω . PNTJE: (i) f má v Ω primitivní fci
(ii) $\forall \varphi$ uzavřenou, po částech C^1 : $\int_{\varphi} f(z) dz = 0$ ($\langle \varphi \rangle \subset \Omega$)
(iii) Křivkový integrál z f nezávisí na cestě v Ω .

Věta: $\Omega \subset \mathbb{C}$ otev., f spojitá a F primitivní k f . Pak $\forall \varphi: [a, b] \rightarrow \Omega$: $\int_{\varphi} f(z) dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ (po částech C^1)

1) $\int_{\varphi} z dz$, φ : polokružnice $|z|=1$ z $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polokružnici
 $f(z)=z$ má primitivní fci $F(z) = \frac{z^2}{2}$ vlně $\forall \mathbb{C} \Rightarrow \int_{\varphi} z dz = F(1) - F(-1) = 0$

Ověříme i z definice: $\varphi: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$: $\varphi(t) = e^{it}$, $\varphi'(t) = ie^{it}$

$$\int_{\varphi} z dz = \int_0^{\pi} e^{it} \cdot ie^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{2it} dt = \frac{i}{2i} [e^{2it}]_0^{\pi} = \frac{1}{2} (1-1) = 0$$

2) $\int_{\varphi} (z-a)^n dz$, φ : kladně orientovaná kružnice $|z-a|=R$, $n \in \mathbb{Z}$

$n \geq 0$: f má primitivní fci $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int_{\varphi} (z-a)^n dz = 0$

(z definice: $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$: $\varphi(t) = Re^{it} + a$)

$$\int_{\varphi} (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n \cdot iRe^{it} dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = iR^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$n < 0$: analogicky jako výše: $\int_{\varphi} (z-a)^n dz = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt$... $n = -1$: $\int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \Rightarrow \int_{\varphi} (z-a)^{-1} dz = 2\pi i$
 $n \neq -1$: $iR^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0$, protože $e^{2\pi i(n+1)} = 1$ pro $n \in \mathbb{Z}$

3) $\int_{\gamma} |z| dz$, γ je přímoucí bodu $2-i$

$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}: \gamma(t) = (2-i)t$
 $\gamma'(t) = (2-i)$

$| (2-i)t | = \sqrt{5}t \Rightarrow \int_{\gamma} |z| dz = \int_0^1 \sqrt{5}t \cdot (2-i) dt = \sqrt{5}(2-i) \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}(2-i)}}$

4) V zadání je překlep, má být "polomezikružní", tj. viz obrázek



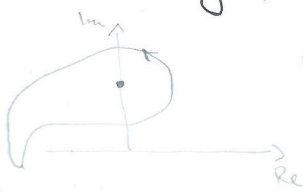
γ má 4 kusy. $\gamma_1(t) = 2e^{it}$ pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\gamma_1' = 2ie^{it}$
 $\gamma_2(t) = -2+t$ pro $t \in (0,1)$ $\gamma_2' = 1$
 $\gamma_3(t) = -e^{-it}$ pro $t \in (0, \pi)$ $\gamma_3' = ie^{-it}$
 $\gamma_4(t) = 1+t$ pro $t \in (0,1)$ $\gamma_4' = 1$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{z}{z} dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2e^{it}}{2e^{it}} 2ie^{it} dt = 2i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3it} dt = \frac{2}{3} [e^{3it}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \cdot (-1-1) = -\frac{4}{3} \\ \int_{\gamma_2} \frac{z}{z} dz &= \int_0^1 \frac{-2+t}{-2+t} \cdot 1 dt = \int_0^1 1 dt = 1 \\ \int_{\gamma_3} \frac{z}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{-e^{-it}}{-e^{-it}} ie^{-it} dt = i \int_0^{\pi} e^{-3it} dt = \frac{i}{-3i} [e^{-3it}]_0^{\pi} = -\frac{1}{3} (-1-1) = \frac{2}{3} \\ \int_{\gamma_4} \frac{z}{z} dz &= \int_0^1 \frac{1+t}{1+t} \cdot 1 dt = \int_0^1 1 dt = 1 \end{aligned} \right\} \int_{\gamma} \frac{z}{z} dz = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

5) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = -\frac{1}{6i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z+3i} + \frac{1}{6i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-3i}$ $\frac{1}{z \pm 3i}$ jsou holomorfní na každé oblasti, která neobsahuje body $\pm 3i$

a) γ je taková, že $\pm 3i$ oba leží vně křivky γ : $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = 0$ z holomorfnosti

b) $3i$ je uvnitř, $-3i$ je vně:



Integrál přes libovolnou křivku je z holomorfnosti roven integrálu přes kružnici

$\gamma(t) = 3i + \xi e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$
 $\gamma'(t) = i \xi e^{it} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{dz}{z-3i} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\xi e^{it}} \cdot i \xi e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$
 $\Rightarrow -\frac{1}{6i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-3i} = -\frac{\pi}{3}$

Křivka může bod $3i$ obcházet nekolikrát, i v opačném směru $\Rightarrow$ možné hodnoty jsou $\in \frac{\pi}{3}, \mathbb{Z}$

c) $-3i$ uvnitř, $3i$ vně: analogicky, opět možné hodnoty $\in \frac{\pi}{3}, \mathbb{Z}$

d) oba uvnitř opět naintegrujeme pouze celé násobky $\frac{\pi}{3} \Rightarrow$ Možné hodnoty jsou $\in \frac{\pi}{3}, \mathbb{Z}$

6) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \int_{\gamma} \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1} dz$ / zdejvací metodou $A=-1$
 $B=C=\frac{1}{2}$

$$= \int_{\gamma} -\frac{1}{z} dz + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dz}{z+1}$$

a) $\varphi(z) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$ z holomorfnosti vypadne první a třetí integrál

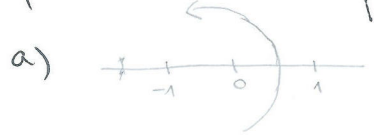
$$\varphi'(z) = \frac{1}{2}ie^{it} \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{it}} \cdot \frac{1}{2}ie^{it} dt = \pi i$$

(podle směru obíhání bude $\pm \pi i$)

b) Vypadne ~~první~~ třetí a druhý integrál a stejným výpočtem $\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)} = - \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = -2\pi i$
 (dle směru $\pm 2\pi i$)

c) Vypadne první a druhý integrál: $\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{dz}{z+1} = \pi i$ (dle směru $\pm \pi i$)

7) $\int_{\gamma} \frac{1}{2\pi i} \frac{z^2 dz}{z(z-1)^3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} -\frac{z^2}{z} + \frac{z^2}{z-1} - \frac{z^2}{(z-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^3} dz$
 $I = \gamma$



z holomorfnosti vypadne poslední tři integrály

$$I = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{z} dz$$

Najjednodušší je zde využít Cauchyův vzorec: f holomorfní uvnitř křivky γ , $z_0 \in \text{int } \gamma$
 kladně orientované

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

$$\text{a } f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

Prozkoume pro $z=0$: $-z^0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{z} dz$, tj. $I = -1$

b) Vypadne první integrál. $I = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{z-1} dz}_A - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z-1)^2} dz}_B + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{(z-1)^3} dz}_C$

Cauchyův vzorec pro $z_0=1$:

$$A = z^1, \quad B = \frac{z^1}{1!}, \quad C = \frac{z^1}{2!}$$

$$I = z^1 - \frac{z^1}{1!} + \frac{z^1}{2!} = \underline{\underline{\frac{z}{2}}}$$

c) Nevypadne žádný integrál, spočítáme stejné $I = -1 + \frac{z}{2}$

8, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{z^2+a^2} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{2ia} \left(\int_{\gamma} \frac{z^2}{z-ia} dz - \int_{\gamma} \frac{z^2}{z+ia} dz \right)$ γ je kružnice o poloměru $2a$, střed u počátku,

kladně orientovaná $\Rightarrow$ obkroží oba body $\pm ia$. Dle Cauchyova vzorce je pak

$$I = \frac{1}{2ia} (e^{ia} - e^{-ia}) = \frac{\sin a}{a}$$

CAUCHYOVA VĚTA

(Už jsme ji v zásadě používali poslední)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, f holomorfní v Ω . Pak pro každou po částech C^1 , uzavřenou křivku γ splývající $\langle \gamma \rangle \subset \Omega$ platí $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

K počítání se občas bude hodit

Jordanova lemma: $R_0 > 0$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, |z| > R_0\}$, $\alpha \geq 0$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá na $\overline{\Omega}$.

Definujme $\Gamma_R(t) = R e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ a $M_R = \max_{t \in [0, \pi]} |f|$

Dále necht' buď i) $\alpha = 0$ a $R M_R \rightarrow 0$ pro $R \rightarrow +\infty$ nebo

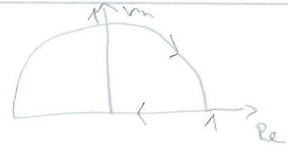
ii) $\alpha > 0$ a $M_R \rightarrow 0$ pro $R \rightarrow +\infty$

Pak $\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \rightarrow 0$ pro $R \rightarrow \infty$. Analogicky pro $\text{Im } z < 0$ a $t \in [\pi, 2\pi]$ a integrály $\int f(z) e^{i\alpha z}$

Cauchyův vzorec: Γ kladně orientovaná Jordanova, po částech C^1 křivka v $\mathbb{C}$. f holomorfní v $\text{Int } \Gamma$ a spojitá na $\overline{\text{Int } \Gamma}$. Pak $\forall z_0 \in \text{Int } \Gamma$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \text{ a } \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

1) $I = \int_{\gamma} |z| \bar{z} dz$



$\varphi_1(t) = e^{it}$, $t \in (\pi, 0)$

$\varphi_1'(t) = i e^{it}$

$\int_{\varphi_1} |z| \bar{z} dz = \int_{\pi}^0 1 e^{-it} i e^{it} dt = -\pi i$

$\varphi_2(t) = t$, $t \in (1, 0)$

$\varphi_2'(t) = 1$ $\int_{\varphi_2} |z| \bar{z} dz = \int_1^0 t^2 dt = -\frac{1}{3}$

$\varphi_3(t) = t$, $t \in (0, -1)$

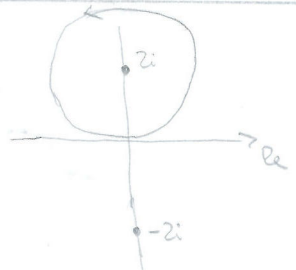
$\varphi_3'(t) = 1$ $\int_{\varphi_3} |z| \bar{z} dz = \int_0^{-1} -t \cdot t dt = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{-1} = \frac{1}{3}$

$I = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} = -\pi i$

2) $I = \int_C \frac{z e^z}{z^2 + 4} dz$

$C = \varphi$, $\varphi(t) = 2i + 2e^{it}$, $t \in (0, 2\pi)$

$\frac{z}{z^2 + 4} = \frac{A}{z - 2i} + \frac{B}{z + 2i}$, $A = B = \frac{1}{2}$



$I = \underbrace{\int_C \frac{1}{2} \frac{e^z}{z - 2i}} + \underbrace{\int_C \frac{1}{2} \frac{e^z}{z + 2i}}$

holomorfní uvnitř $C \Rightarrow \int_C = 0!$

Cauchyův vzorec: $e^{2i} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2i} dz \Rightarrow I = \pi i e^{2i} = -\pi \sin 2 + \pi i \cos 2$

3) $\int_{\varphi} \frac{\sin z dz}{z + i} = I$ $\varphi(t) = -i + 3e^{it}$, $t \in (0, 2\pi)$

$-i$ je uvnitř $\varphi \Rightarrow$ Cauchyův vzorec

$I = 2\pi i \sin(-i) = -2\pi i \sinh(1) = \underline{2\pi \sinh 1}$

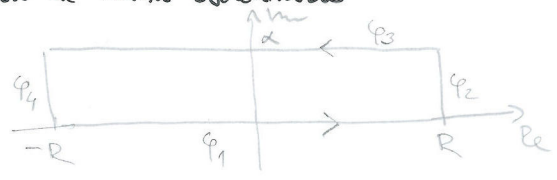
b) $\int_{\gamma} \frac{z^2}{z^2-1} dz = I \quad \varphi = 2e^{it} \quad t \in (0, 2\pi)$

$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \quad A=B=-1/2$

$I = \int_{\gamma} \frac{1}{2} \frac{z^2}{z-1} dz - \int_{\gamma} \frac{1}{2} \frac{z^2}{z+1} dz = \pi i - \pi i = 2\pi i \sinh 1$

4) viz příklad 7 b) z předchozí série $I = -\frac{\pi}{2}$ (pozor na znaménko v zadání)

5) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$. Uvažujme křivku ve tvaru osokřížku



Pať $\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{\gamma_1} f(z) dz$

$\int_{\gamma_3} f(z) dz = - \int_{iR}^{-iR} f(x) dx$

$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^R f(R+ti) i dt \quad \text{a} \quad \int_{\gamma_4} f(z) dz = - \int_0^R f(-R+ti) i dt$

$|\int_{\gamma_2} f(z) dz| \leq \int_0^R |f(R+ti)| dt \rightarrow 0 \text{ pro } R \rightarrow \infty \text{ dle předpokladu } f(z) \rightarrow 0 \text{ pro } z \rightarrow \infty$

Takéž pro $\int_{\gamma_4}$. Cauchy: $\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 0$

$\Rightarrow \int_{\gamma_1} = - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{iR}^{-iR} f(x) dx = \int_{i\infty}^{-i\infty} f(x) dx$

6) Toto budeme dále označovat jako "lemma o obkružování pólu násobnosti 1".



$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_0^b f(a+re^{it}) i r e^{it} dt$

$\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0+} \int_0^b f(a+re^{it}) i r e^{it} dt = i \int_0^b \lim_{r \rightarrow 0+} f(a+re^{it}) r e^{it} dt$

$f(a+re^{it}) r e^{it} = f(z)(z-a) \text{ pro } z = a+re^{it}$

Z existence limity $f(z)(z-a)$ plyne existence limity $\lim_{r \rightarrow 0+} f(a+re^{it}) r e^{it}$ a rovnost těchto limit.

Proto $\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i \int_0^b A dt = iAb$

Prohazem' limity a integrálu:

$g_r(t) := f(a+re^{it}) r e^{it}$

f spojitá $\Rightarrow g_r$ spojitá $\Rightarrow g_r$ měřitelná

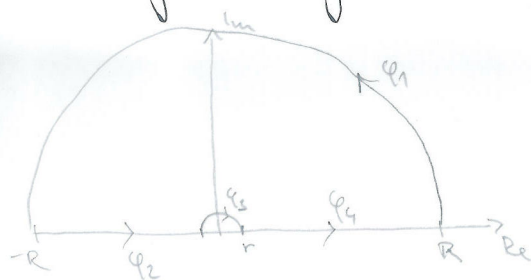
$\lim_{r \rightarrow 0+} g_r(t) = A \quad \forall t \in (0, b) \Rightarrow |g_r(t)| \leq 2A \text{ pro } r \leq \tilde{r}_0$

$\tilde{r}_0$ dost. malé $\Rightarrow$ Máme majorantu $\Rightarrow$ Lebesgueova věta.

$$7, a) I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Použijeme $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$
 $a) I = \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$

Uvažujme následující uzavřenou křivku a fci $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$



$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 0 \text{ z holomorfnosti}$$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz: \text{Jordanova lemma: } \alpha=1, \tilde{f}(z) = \frac{1}{z}, M_R \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$$

Dále z lichosti fci $\sin x$ a x platí $\operatorname{Im} \int_{\gamma_2} f(z) dz = \operatorname{Im} \int_{\gamma_1} f(z) dz$

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz =$$

Použijeme 6): $a=0, b=\pi, \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0+} \int_{\gamma_2} f(z) dz = -i\pi \quad (- \text{protože obíháme v opačném směru})$$

Eliminujeme $r \rightarrow 0+$ a $R \rightarrow +\infty$, vezmeme Im z výsledku a dostaneme

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$b) I = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

Stejná křivka jako výše, opět je součet = 0 z holomorfnosti

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{e^{iz}}{z^2} = g(z) - h(z)$$

$$g(z) = \frac{1}{z^2} \quad h(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$$

$$\gamma_1: \int_{\gamma_1} g(z) dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2 e^{2it}} \cdot R i e^{it} = \frac{i}{R} \int_0^{\pi} e^{-it} dt \rightarrow 0 \text{ pro } R \rightarrow \infty$$

$$\int_{\gamma_4} h(z) dz: \text{Použijeme Jordanovu lemma, } \alpha=1, \tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2}, M_R \rightarrow 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$$

$$\gamma_2 + \gamma_4: \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} f(z) dz = \operatorname{Re} \int_{\gamma_4} f(z) dz \text{ ze sudosti fce } \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\gamma_3: \text{Použijeme 6), } a=0, b=\pi, \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} \cdot z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{iz}}{z} = -i$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0+} \int_{\gamma_3} f(z) dz = -i\pi \cdot (-i) = -\pi$$

Eliminujeme $r \rightarrow 0+$, $R \rightarrow +\infty$, vezmeme Re z výsledku a dostaneme

$$2 \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx - \pi = 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$