

Funkce komplexní proměnné

Elementární funkce

- Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
a) $\cos(2 + i)$ b) $\sin(2i)$ c) $\operatorname{tg}(2 - i)$.
- Dokažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
- Dokažte, že pro $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí:
a) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$
b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \sin z_1$
c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
d) $\sin(iz) = i \sinh z$
e) $\cos(iz) = \cosh z$.
- Nalezněte řešení rovnic:
a) $\sin z + \cos z = 2$ b) $\sinh z - \cosh z = 2i$
- Najděte součet $\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos(\alpha + n\beta)$.
- Při zobrazení $w = z^2$, $w = u + iv$, $z = x + iy$ najděte
a) obrazy přímek $x = C$, $C \in \mathbb{R}$
b) obrazy kružnic $|z| = R > 0$
c) vzory přímek $u = C$.
- Najděte obraz kartézské souřadnicové sítě ($x = C$, $y = C$) při zobrazení $w = e^z$.
- Najděte obraz $\operatorname{Im} z = 1$ při zobrazení $w = \frac{z-1}{z+1}$.
- Najděte obraz $|z + 1| = 1$ při zobrazení $w = \frac{1}{z}$.
- Najděte obraz $|z| = 2$ při zobrazení $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.
- Zjistěte, zda funkce $f(z) = |z|$ je v nějaké oblasti holomorfní.

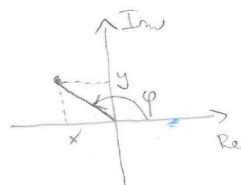
12. Nalezněte nutné a postačující podmínky na reálné konstanty a , b a c , aby následující funkce byly holomorfní
- $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$
 - $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.
13. Ukažte, že reálná funkce $f(x + iy) = f(z) = \sqrt{|xy|}$ splňuje v počátku Cauchy–Riemannovy podmínky, ale nemá tam derivaci podle z .
14. Dokažte, že platí
- $(\sinh z)' = \cosh z$
 - $(\cosh z)' = \sinh z$
 - $(\sin z)' = \cos z$
 - $(\cos z)' = -\sin z$.
15. Nalezněte holomorfní funkci (na příslušné oblasti) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, je-li
- $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y)$
 - $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$
 - $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

KOMPLEXNÍ ANALÝZA

4

$$z \in \mathbb{C} : z = x + iy \quad \begin{cases} x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R} \\ y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$i^2 = -1$$



$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arg z \quad \text{volíme tak, aby } \varphi \in (-\pi, \pi]$$

(nemí definováno pro $z=0$)

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{pro } z = x + iy$$

Elementární funkce: $e^z = \exp z := e^x (\cos y + i \sin y) \quad \text{pro } z = x + iy$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{poloměr konvergence řady je } \infty!)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$1) a) \cos(2+i) = \frac{1}{2} (e^{2i-1} + e^{-2i+1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} (\cos 2 + i \sin 2) + e (\cos 2 - i \sin 2) \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \cos(2+i) = \frac{\cos 2}{2} (e + e^{-1}) = \cos 2 \cdot \cosh 1$$

$$\operatorname{Im} \cos(2+i) = \frac{\sin 2}{2} (-e + e^{-1}) = -\sin 2 \sinh 1$$

$$b) \sin(2i) = \frac{1}{2i} (e^{-2} - e^2) = \frac{i}{2} (e^2 - e^{-2}) \Rightarrow \operatorname{Re} \sin(2i) = 0, \operatorname{Im} \sin(2i) = \sinh 2$$

$$c) \operatorname{tg}(2-i) = \frac{\sin(2-i)}{\cos(2-i)} = \frac{\frac{1}{2i} (e^{1+2i} - e^{-1-2i})}{\frac{1}{2} (e^{1+2i} + e^{-1-2i})} = \frac{\frac{1}{2i} (e \cdot (\cos 2 + i \sin 2) - \frac{1}{e} (\cos 2 - i \sin 2))}{\frac{1}{2} (e (\cos 2 + i \sin 2) + \frac{1}{e} (\cos 2 - i \sin 2))} =$$

$$= \frac{\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1}{\cos 2 \cosh 1 + i \sin 2 \sinh 1} = \frac{(\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1)(\cos 2 \cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1)}{\cos^2 2 \cosh^2 1 + \sin^2 2 \sinh^2 1} =$$

$$= \frac{\sin 2 \cos 2 (\cosh^2 1 - \sinh^2 1) - i \sinh 1 \cosh 1 (\cos^2 2 + \sin^2 2)}{\cos^2 2 \cosh^2 1 + \sin^2 2 \sinh^2 1 + \sin^2 2 \cosh^2 1 - \sin^2 2 \sinh^2 1} \Rightarrow \operatorname{Re} \operatorname{tg}(2-i) = \frac{\sin 2 \cos 2}{\cosh^2 1 - \sinh^2 2}$$

$$\operatorname{Im} \operatorname{tg}(2-i) = \frac{-\sinh 1 \cosh 1}{\cosh^2 1 - \sinh^2 2}$$

$$2) \text{ DŮM. } z_1 = a + ib \quad \text{Pak } \exp(z_1 + z_2) = \exp((a+c) + i(b+d)) = \exp(a+c) \cdot (\cos(b+d) + i \sin(b+d))$$

$$z_2 = c + id$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b) \cdot e^c (\cos d + i \sin d) =$$

$$= e^{a+c} \cdot [\cos b \cos d - \sin b \sin d + i(\sin b \cos d + \cos b \sin d)]$$

$$= \exp(a+c) \cdot [\cos(b+d) + i \sin(b+d)] \quad \text{CBD.}$$

$$3) a) \sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i} (e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) = \frac{1}{2i} (e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2})$$

$$\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 = \frac{1}{4i} ((e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_2} - e^{-iz_2})(e^{iz_1} + e^{-iz_1})) = \frac{1}{4i} (2e^{iz_1} e^{iz_2} - 2e^{-iz_1} e^{-iz_2})$$

CBD.

$$b) \cos(z_1 + z_2) = \frac{1}{2} (e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) = \frac{1}{2} (e^{iz_1} e^{iz_2} + e^{-iz_1} e^{-iz_2})$$

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \frac{1}{4} \left((e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \right) = \frac{1}{4} (2e^{iz_1} e^{iz_2} + 2e^{-iz_1} e^{-iz_2})$$

(8D)

c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$: Využijeme b) pro $z_1 = z$ $z_2 = -z$ Pak $LS = 1 = \cos 0 = 1$
 $PS = \cos z \cdot \cos(-z) - \sin z \cdot \sin(-z) = \cos^2 z + \sin^2 z$
 ze sudosti $\cos z$ a lichosti $\sin z$, což plyne z definic

$$d) \sin(iz) = \frac{1}{2i} (e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2i} (e^{-z} - e^z) = \frac{i}{2} (e^z - e^{-z}) = i \sinh z$$

$$e) \cos(iz) = \frac{1}{2} (e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}) = \frac{1}{2} (e^{-z} + e^z) = \cosh z$$

4) a) $\sin z + \cos z = 2$ Hledáme $z = a + ib$

$$\sin(a+ib) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$$

$$\cos(a+ib) = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$$

$$\Rightarrow LS: \cosh b \cdot (\sin a + \cos a) + i \sinh b (\cos a - \sin a)$$

$$PS: 2 + i0$$

$$\Rightarrow \text{Soustava rovnic: } \sinh b (\cos a - \sin a) = 0$$

$$\cosh b (\sin a + \cos a) = 2$$

1. rovnice: 1. možnost $\sinh b = 0 \Rightarrow b = 0$, a libovolné

$$\Rightarrow 2. \text{ rovnice } \sin a + \cos a = 2. \text{ To nemá v } \mathbb{R} \text{ řešení}$$

2. možnost: $\sin a = \cos a \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b libovolné

$$\Rightarrow 2. \text{ rovnice } \rightarrow k \text{ sudé: } \sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow \cosh b = \sqrt{2}$$

$$b = \pm \operatorname{argcosh} \sqrt{2}$$

$$\rightarrow k \text{ liché: } \sin a + \cos a = -\sqrt{2} \Rightarrow \cosh b = -\sqrt{2}$$

není řešení

$$\Rightarrow z = a + ib, \text{ kde } a = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$b = \pm \operatorname{argcosh} \sqrt{2}$$

$$(\operatorname{argcosh} \sqrt{2} = \ln(\sqrt{2} + 1))$$

$$-\operatorname{argcosh} \sqrt{2} = \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \ln(\sqrt{2} - 1)$$

b) $\sinh z - \cosh z = 2i$ Opět $z = a + ib$

$$\frac{1}{2i} \sin(-b+ia) - \cos(-b+ia) = -i(-\sinh b \cos ia + \cosh b \sin ia) - (\cosh b \cos ia + \sinh b \sin ia)$$

$$= \cosh b (\sinh a - \cosh a) + i (\sinh b (\cosh a - \sinh a)) \Rightarrow \cosh b (\sinh a - \cosh a) = 0$$

$$\sinh b (\sinh a - \cosh a) = -2$$

$$\Rightarrow \cosh b = 0, \text{ tj. } b = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ 2. rovnice: } k \text{ liché: } \sinh a - \cosh a = -2 \Rightarrow e^{-a} = -2 \text{ nemá řeš.}$$

$$k \text{ sudé: } \sinh a - \cosh a = -2 \Rightarrow e^{-a} = 2 \Rightarrow a = -\ln 2$$

$$\Rightarrow z = -\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

Komplexní zobrazení, holomorfní funkce

f má v $a \in \mathbb{C}$ derivaci, jestliže existuje $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. f je holomorfní v a , jestliže ex. okolí a t.ž. f tam má derivaci
je otevřená množina

f je holomorfní v Ω , jestliže f má derivaci všude v Ω

Př.: z^k je holomorfní $\forall k \in \mathbb{N}$ na $\mathbb{C}$, $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\bar{z}$ není holomorfní nikde!

Věta (Cauchy-Riemannovy podmínky)

Nechť $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má v $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ derivaci.

Označme $f(z) = u(z_1, z_2) + i v(z_1, z_2)$ pro $z = z_1 + iz_2$, kde $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

a $F(z_1, z_2) := (u(z_1, z_2), v(z_1, z_2))$, tedy $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pak

a) Funkce u, v v bode $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ splňují $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ a $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ (C.-R. p.)

b) F má v bode (a_1, a_2) tot. diferenciál a $J_F(a_1, a_2) = |f'(a)|^2$

Věta (Druhá věta o C.-R. p.):

Nechť $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a u, v jsou jako výše, necht' jsou definovány na okolí $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Jestliže u, v mají v (a_1, a_2) totální diferenciál a splňují v něm C.-R. p.,

pak f má v $a = a_1 + ia_2$ derivaci a platí $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a_1, a_2)$

5) $\beta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$: $\sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\beta) = n \cdot \cos \alpha$

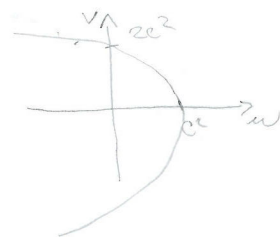
$$\beta \neq 2k\pi: \sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\beta) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n e^{i(\alpha + k\beta)} = \operatorname{Re} e^{i\alpha} \sum_{k=0}^n e^{ik\beta} = \operatorname{Re} e^{i\alpha} \frac{e^{i(n+1)\beta} - 1}{e^{i\beta} - 1}$$

$$= \operatorname{Re} e^{i\alpha} \frac{e^{i\frac{(n+1)\beta}{2}} \cdot \sin(\frac{(n+1)\beta}{2})}{e^{i\frac{\beta}{2}} \cdot \sin \frac{\beta}{2}} = \operatorname{Re} e^{i(\alpha + \frac{n}{2}\beta)} \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos(\alpha + \frac{n}{2}\beta) \sin(\frac{n+1}{2}\beta)}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

6) $z = x + iy$, $w = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u + iv$, tj. $u(x, y) = x^2 - y^2$
 $v(x, y) = 2xy$

a) $x = \mathbb{C}$: $u = x^2 - y^2$
 $v = 2xy$... Je-li $C = 0$, pak $v = 0$, $u = -y^2$, tj. obraz je záporná reálná poloosa $w \leq 0$.

... Je-li $C \neq 0$, pak $y = \frac{v}{2C} \Rightarrow u = C^2 - \frac{v^2}{4C^2}$... parabola

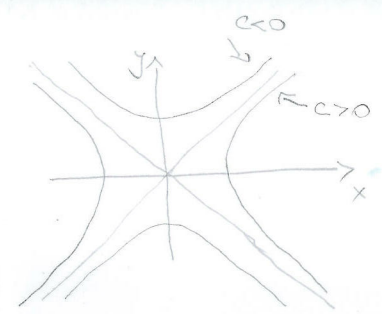


b) $|z| = R$, tj. $x^2 + y^2 = R^2$: $u = x^2 - y^2 = R^2 - 2y^2$
 $v = 2xy = 2y \cdot \sqrt{R^2 - y^2} \Rightarrow 4y^2 \cdot (R^2 - y^2) = v^2 \Rightarrow y^2 = \frac{R^2 \pm \sqrt{R^4 - v^2}}{2}$

$\Rightarrow u = R^2 - 2y^2 = \pm \sqrt{R^4 - v^2} \Rightarrow u^2 + v^2 = R^4$... obraz je kružnice o poloměru R^2 .

c) $w = C$, v je libovolné

$x^2 - y^2 = C$ $C = 0$: dvojice přímek $y = \pm x$
 $C \neq 0$: hyperboly



7) $w = e^z$ $z = x + iy \Rightarrow w = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

$u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$

$x = C$: $w = e^C \cos y$
 $v = e^C \sin y$ } $u^2 + v^2 = e^{2C}$... kružnice o poloměru e^C

$y = C$: $w = e^x \cos C$
 $v = e^x \sin C$ } $\begin{cases} C = 0 \Rightarrow \text{kladná reálná poloosa } u > 0, v = 0 \\ C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{kladná imaginární poloosa } u = 0, v > 0 \\ C = \pi \Rightarrow \text{záporná reálná poloosa } u < 0, v = 0 \\ C = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \text{záporná imaginární poloosa } u = 0, v < 0 \end{cases}$

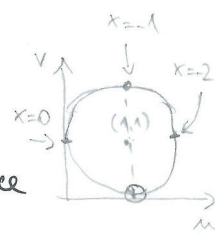
$C \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^x = \frac{w}{\cos C} \Rightarrow v = w \cdot \tan C$... polopřímky startující z počátku

vše je 2π -periodické

8) $w = \frac{z-1}{z+1}$ $z = x + iy$ $w = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2-1+y^2+2iy}{(x+1)^2+y^2}$

$y = 1$: $w = \frac{x^2+2i}{x^2+2x+2}$ $u = \frac{x^2}{x^2+2x+2}$, $v = \frac{2}{x^2+2x+2} \Rightarrow x^2+2x+2 = \frac{2}{v}$
 $\Rightarrow \dots \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(2-v)}}{2} = -1 \pm \sqrt{\frac{2}{v}-1}$
 $\Rightarrow x^2 = \frac{2}{v} \mp 2\sqrt{\frac{2}{v}-1}$

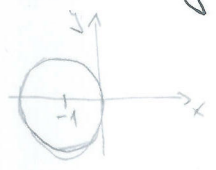
$\Rightarrow w = \frac{v}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} \mp 2\sqrt{\frac{2}{v}-1} \right)$
 $= 1 \mp \sqrt{v \cdot (2-v)} \Rightarrow (w-1)^2 = v \cdot (2-v) = 2v - v^2$
 $\Rightarrow (w-1)^2 + (v-1)^2 = 1$... kružnice



Technicky vzato mimo bod 1, který se "nadívá" jen jeho limita $x \rightarrow \pm \infty$

9) $w = \frac{1}{z}$ $z = x + iy$ $w = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

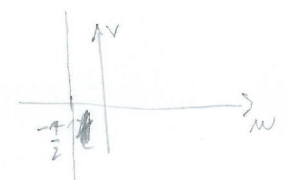
$|z+1|=1$ je $(x+1)^2+y^2=1$
 $x^2+2x+y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=-2x$



$\Rightarrow u = -\frac{1}{2}$ $v = \frac{y}{2x} = \frac{\pm \sqrt{-2x-x^2}}{2x}$
 $= \pm \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2x}}$

kde $x \in [-2, 0]$ dle obrazy. $\begin{cases} x = -2 : v = 0 \\ x = -1 : v = \pm \frac{1}{2} \\ x \rightarrow 0^- : v \rightarrow \pm \infty \end{cases}$ } v nabývá lib. hodnot na celém $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ obraz dané kružnice je přímka $-\frac{1}{2} + ti$, $t \in \mathbb{R}$



$$10) w = \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad z = x + iy \quad w = \frac{1}{z} \left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} + i \frac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2}$$

$$|z|=2 : x^2 + y^2 = 4 \quad : w = \frac{5x}{4} \quad v = \frac{3}{4}y \Rightarrow \left(\frac{4}{5}x\right)^2 + \left(\frac{4}{3}y\right)^2 = 4$$

$$\frac{4}{25}x^2 + \frac{4}{9}y^2 = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}y\right)^2 = 1 \dots \text{elipsa}$$

$$11) \text{ Ne!! } w(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Nesplňuje podmínky C.-R.p.}$$

$$v(x,y) = 0$$

Ověřte, pokud je funkce komplexní proměnné reálná (její im. část je $\equiv 0$), pak musí být konstantní, pokud má být holomorfní. $|z|$ není konstantní na žádné otev. množině v $\mathbb{C}$.

$$12) a) f(z) = x + ay + i(bx + cy) \quad , \quad \text{fj. } z = x + iy \quad w(x,y) = x + ay$$

$$v(x,y) = bx + cy$$

$$\text{C.-R.p.: } \left. \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = c \Rightarrow c = 1! \\ \frac{\partial v}{\partial x} = b \quad \frac{\partial w}{\partial y} = a \Rightarrow b = -a \end{array} \right\} \text{ Nutná podmínka}$$

Postupující podmínka: C.-R.p. + existence tot. dif. $w(x,y)$ a $v(x,y)$. To jsou lineární fce $\Rightarrow$ ex. tot. dif. všude, fj. $c=1$, $b=-a$ jsou nutné i postupující podmínky

$$b) f(z) = \cos x (\cosh y + a \sinh y) + i \sin x (\cosh y + b \sinh y)$$

$$u(x,y) = \cos x (\cosh y + a \sinh y)$$

$$v(x,y) = \sin x (\cosh y + b \sinh y)$$

$$\text{C.-R.p.: } \left. \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} = -\sin x (\cosh y + a \sinh y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x (\sinh y + b \cosh y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \cos x (\cosh y + b \sinh y) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \cos x (\sinh y + a \cosh y) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \end{array}$$

Nutná podmínka, která je i postupující, protože tot. dif. fce u, v existují všude

$$13) f(x+iy) = \sqrt{|xy|} \quad , \quad \text{fj. } u(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

$$v(x,y) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = 0 \end{array} \right\} \text{C.-R.p. splněny}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{h_1 + i h_2} \dots h_1 = 0, h_2 \rightarrow 0 : \lim_{h_2 \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$h_1 = h_2 : \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{|h_1|}{h_1(1+i)} = \frac{1}{1+i} \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{|h_1|}{h_1}$$

nemá limitu

$\Rightarrow f'(0)$ neex.

14) Funkce e^z , $\sin/\cos$, $\sinh/\cosh$ jsou zavedeny jako součty řad stejné jako jejich reálné protějšky. Tyto řady mají poloměr konvergence $R=\infty$ a podle věty o holomorfnosti součtu řady také definují holomorfní fce, které tedy lze derivovat člen po členu. Proto

$$(e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Vztahy pro $\sin/\cos$ a $\sinh/\cosh$ lze odvodit buď analogicky skrz řady nebo pomocí derivace exponenciál:

$$\begin{aligned} (\sinh z)' &= \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \cosh z \\ (\cosh z)' &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \sinh z \\ (\sin z)' &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}) = \cos z \\ (\cos z)' &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) \\ &= -\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z \end{aligned}$$

15) a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x(x \cos y - y \sin y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + e^x(x \cos y - y \sin y) + e^x(\cos y - y \sin y) = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \Rightarrow v(x,y) &= \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = 2xy + \int e^x(x \cos y - y \sin y) dy + C_1(x) \\ &= 2xy + e^x(x \sin y + y \cos y) - e^x \int y \sin y dy + C_1(x) \\ &= 2xy + e^x(x \sin y + y \cos y) - e^x \sin y + C_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y - e^x(x \sin y + y \cos y) = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \Rightarrow v(x,y) &= \int (-2y - e^x(x \sin y + y \cos y)) dx = -2xy - e^x(x \sin y + y \cos y) + C_2(y) \\ &= -2xy - e^x(x \sin y + y \cos y) + C_2(y) \end{aligned}$$

Porovnáním obou výsledků vidíme, že se nic neztratilo, a proto $C_1(x) = C_2(y) = C$ a

$$v(x,y) = 2xy + e^x(y \cos y + x \sin y) + C, \quad z \in \mathbb{C}, C \in \mathbb{R}$$

Spojením u+iv a zjednodušením najdeme $f(z) = z^2 + ze^z + Ci$

b) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + 5y + 2x \int \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} dy = 2xy + 5y + x \int \frac{1}{(t+x^2)^2} dt = 2xy + 5y - \frac{x}{y^2 + x^2} + C_1(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + x + \int \frac{1}{x^2 + y^2} dx - 2y^2 \left[\frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2} \int \frac{dx}{x^2 + y^2} \right]$$

$$= 2xy + x - \frac{x}{y^2 + x^2} + C_2(y)$$

$$\Rightarrow C_1(x) = x, C_2(y) = 5y \quad \text{a} \quad v(x,y) = 2xy + x + 5y - \frac{x}{y^2 + x^2} + C, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, C \in \mathbb{R}$$

c) DÚ

Spojením u+iv a zjednodušením najdeme $f(z) = z^2 + (5-i)z - i/z + Ci$