Sada příkladů 2/11

# Funkce komplexní proměnné

## Elementární funkce

1. Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
   a) $\cos(2+\mathrm{i})$ b) $\sin(2\mathrm{i})$ c) $\operatorname{tg}(2-\mathrm{i})$.

2. Dokažte, že pro $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

3. Dokažte, že pro $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ platí:
   a) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$
   b) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \sin z_1$
   c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
   d) $\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z$
   e) $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z$.

4. Nalezněte řešení rovnic:
   a) $\sin z + \cos z = 2$ b) $\sinh z - \cosh z = 2\mathrm{i}$

5. Najděte součet $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha+n\beta)$.

6. Při zobrazení $w = z^2$, $w = u + \mathrm{i}v$, $z = x + \mathrm{i}y$ najděte
   a) obrazy přímek $x = C$, $C \in \mathbb{R}$
   b) obrazy kružnic $|z| = R > 0$
   c) vzory přímek $u = C$.

7. Najděte obraz kartézské souřadnicové sítě ($x = C$, $y = C$) při zobrazení $w = \mathrm{e}^z$.

8. Najděte obraz $\operatorname{Im} z = 1$ při zobrazení $w = \frac{z-1}{z+1}$.

9. Najděte obraz $|z+1| = 1$ při zobrazení $w = \frac{1}{z}$.

10. Najděte obraz $|z| = 2$ při zobrazení $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

11. Zjistěte, zda funkce $f(z) = |z|$ je v nějaké oblasti holomorfní.

12. Nalezněte nutné a postačující podmínky na reálné konstanty $a$, $b$ a $c$, aby následující funkce byly holomorfní
a) $f(z) = x + ay + \mathrm{i}(bx + cy)$
b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + \mathrm{i} \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.

13. Ukažte, že reálná funkce $f(x + \mathrm{i}y) = f(z) = \sqrt{|xy|}$ splňuje v počátku Cauchy–Riemannovy podmínky, ale nemá tam derivaci podle $z$.

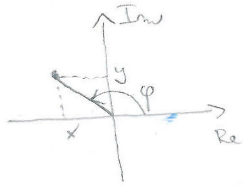
14. Dokažte, že platí
a) $(\sinh z)' = \cosh z$
b) $(\cosh z)' = \sinh z$
c) $(\sin z)' = \cos z$
d) $(\cos z)' = -\sin z$.

15. Nalezněte holomorfní funkci (na příslušné oblasti) $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, je-li
a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x(x \cos y - y \sin y)$
b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
c) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

# KOMPLEXNÍ ANALÝZA



$z \in \mathbb{C}$ : $z = x + iy$ $\quad$ $x = \mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R}$, $y = \mathrm{Im}\, z \in \mathbb{R}$ $\quad$ $i^2 = -1$




$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ $\quad$ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \arg z$ volíme tak, aby $\varphi \in (-\pi, \pi]$

(není definováno pro $z = 0$)

$\bar{z} = x - iy$ pro $z = x + iy$

Elementární funkce: $e^z = \exp z := e^x (\cos y + i \sin y)$ pro $z = x + iy$

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \quad \text{(poloměr konvergence řady je } \infty\text{!)}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

---

1) a) $$\cos(2+i) = \frac{1}{2}\left(e^{2i-1} + e^{-2i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\cdot(\cos 2 + i \sin 2) + e(\cos 2 - i \sin 2)\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\, \cos(2+i) = \frac{\cos 2}{2}\left(e + e^{-1}\right) = \cos 2 \cdot \cosh 1$$

$$\mathrm{Im}\, \cos(2+i) = \frac{\sin 2}{2}\left(-e + e^{-1}\right) = -\sin 2 \sinh 1$$

b) $$\sin(2i) = \frac{1}{2i}\left(e^{-2} - e^{2}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{2} - e^{-2}\right) \Rightarrow \mathrm{Re}\, \sin(2i) = 0,\ \mathrm{Im}\, \sin(2i) = \sinh 2$$

c) $$\mathrm{tg}(2-i) = \frac{\sin(2-i)}{\cos(2-i)} = \frac{\frac{1}{2i}\left(e^{1+2i} - e^{-1-2i}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{1+2i} + e^{-1-2i}\right)} = \frac{\frac{1}{2i}\left(e\cdot(\cos 2 + i\sin 2) - \frac{1}{e}(\cos 2 - i \sin 2)\right)}{\frac{1}{2}\left(e(\cos 2 + i \sin 2) + \frac{1}{e}(\cos 2 - i \sin 2)\right)} =$$

$$= \frac{\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1}{\cos 2 \cosh 1 + i \sin 2 \sinh 1} = \frac{(\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1)(\cos 2 \cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1)}{\cos^2 2 \cosh^2 1 + \sin^2 2 \sinh^2 1} =$$

$$= \frac{\sin 2 \cos 2 (\cosh^2 1 - \sinh^2 1) - i \sinh 1 \cosh 1 (\cos^2 2 + \sin^2 2)}{\cos^2 2 \cosh^2 1 + \sin^2 2 \sinh^2 1 + \sin^2 2 \cosh^2 1 - \sin^2 2 \cosh^2 1} \Rightarrow \mathrm{Re}\, \mathrm{tg}(2-i) = \frac{\sin 2 \cos 2}{\cosh^2 1 - \sin^2 2}$$

$$\mathrm{Im}\, \mathrm{tg}(2-i) = \frac{-\sinh 1 \cosh 1}{\cosh^2 1 - \sin^2 2}$$

---

2) Ozn. $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. Pak $\exp(z_1 + z_2) = \exp\left((a+c) + i(b+d)\right) = \exp(a+c)\cdot\left(\cos(b+d) + i \sin(b+d)\right)$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b) \cdot e^c (\cos d + i \sin d) =$$

$$= e^{a+c} \cdot \left[\cos b \cos d - \sin b \sin d + i(\sin b \cos d + \cos b \sin d)\right]$$

$$= \exp(a+c) \cdot \left[\cos(b+d) + i \sin(b+d)\right]$$

CBD.

---

3) a) $$\sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}\right)$$

$$\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 = \frac{1}{4i}\left(\left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right)\left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\right) = \frac{1}{4i}\left(2 e^{iz_1} e^{iz_2} - 2 e^{-iz_1} e^{-iz_2}\right)$$

CBD.

b) $\cos(z_1+z_2) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right)$

$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \frac{1}{4}\left(\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(2e^{iz_1}e^{iz_2} + 2e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right)$

CBD

---

c) $\sin^2 z + \cos^2 z$ : Využijeme b) pro $z_1 = z$, $z_2 = -z$. Pak $LS = e^0 = \cos 0 = 1$

$PS = \cos z \cdot \cos(-z) - \sin z \cdot \sin(-z) = \cos^2 z + \sin^2 z$

ze sudosti $\cos z$ a lichosti $\sin z$, což plyne z definic

---

d) $\sin(iz) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-z} - e^{z}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = i \sinh z$

e) $\cos(iz) = \frac{1}{2}\left(e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-z} + e^{z}\right) = \cosh z$

---

4, a) $\sin z + \cos z = 2$. Hledáme $z = a + ib$

$\sin(a+ib) = \sin a \cos ib + \cos a \sin ib = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$ dle 3 a, d, e

$\cos(a+ib) = \cos a \cos ib - \sin a \sin ib = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$

$\Rightarrow$ LS : $\cosh b \cdot (\sin a + \cos a) + i \sinh b (\cos a - \sin a)$

PS : $2 + i0$

$\Rightarrow$ Soustava rovnic : $\sinh b\,(\cos a - \sin a) = 0$

$\cosh b\,(\sin a + \cos a) = 2$

1. rovnice : 1. možnost $\sinh b = 0 \Rightarrow b = 0$, $a$ libovolné

$\Rightarrow$ 2. rovnice $\sin a + \cos a = 2$. To nemá v $\mathbb{R}$ řešení

2. možnost : $\sin a = \cos a \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $b$ libovolné

$\Rightarrow$ 2. rovnice $\longrightarrow$ $k$ sudé : $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow \cosh b = \sqrt{2}$

$b = \pm \operatorname{argcosh} \sqrt{2}$

$\longrightarrow$ $k$ liché : $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \Rightarrow \cosh b = -\sqrt{2}$

nemá řešení

$\Rightarrow z = a + ib$, kde $a = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$b = \pm \operatorname{argcosh} \sqrt{2}$

$(\operatorname{argcosh}\sqrt{2} = \ln(\sqrt{2}+1)$ a

$-\operatorname{argcosh}\sqrt{2} = \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \ln(\sqrt{2}-1))$

---

b) $\sinh z - \cosh z = 2i$ Opět $z = a + ib$

$\frac{1}{i}\sin(-b+ia) - \cos(-b+ia) = -i\left(-\sin b \cos ia + \cos b \sin ia\right) - \left(\cos b \cos ia + \sin b \sin ia\right)$

$= \cos b(\sinh a - \cosh a) + i\,\sin b(\cosh a - \sinh a)$ $\Rightarrow$ $\cos b(\sinh a - \cosh a) = 0$

$\sin b(\sinh a - \cosh a) = -2$

$\Rightarrow \cos b = 0$, tj. $b = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. rovnice: $k$ liché : $\sinh a - \cosh a = 2 \Rightarrow e^{-a} = -2$ nemá řeš.

$k$ sudé : $\sinh a - \cosh a = -2 \Rightarrow e^{-a} = 2 \Rightarrow a = -\ln 2$

$\Rightarrow z = -\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$