Fourierovy řady

Trigonometrické řady

1. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkci $f(x) = x^4$. Vyšetřete konvergenci této řady a řady derivací.

2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in L^1(-\pi, \pi)$ se anulují, jestliže platí $f(-x) = f(x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$?

3. Jak prodloužíte funkci $f \in L^1(0, \pi/2)$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$?

4. Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu a vyšetřete její konvergenci
   a) $\sin^4 x$ na $(0, \pi)$ b) $f(x) = ax$ na $(-\pi, 0)$, $f(x) = bx$ na $(0, \pi)$
   c) $|\sin x|$ na intervalu délky periody d) $\max(0, x)$ na $(-\pi, \pi)$
   e) e^{ax} na $(-1, 1)$ f) $\ln|\sin \frac{x}{2}|$ na intervalu periody

5. Rozložte do sinové a kosinové řady na $(0, \pi)$ funkci x^2.

Sčítání trigonometrických řad

6. Sečtěte následující řady v uvedených intervalech
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ $(0, 2\pi)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ $[0, 2\pi]$
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ $(-\pi, \pi)$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ $[-\pi, \pi]$

7. Spočtěte
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Aplikace na řešení některých PDR

Pomocí trigonometrických řad řešte následující úlohy

8.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T) \times (0,l)$$
$$u(0,x) = x(l-x) \quad \text{na } [0,l]$$
$$u_t(0,x) = 0 \quad \text{na } [0,l]$$
$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).$$

9.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T) \times (0,l)$$
$$u(0,x) = 0 \quad \text{na } [0,l]$$
$$u_t(0,x) = \cosh x \quad \text{na } [0,l]$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).$$

10.
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T) \times (0,l)$$
$$u(0,x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{na } [0,l]$$
$$u(t,0) = u_x(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).$$

11.
$$\Delta u = 0 \text{ na } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$
$$u(x,y) = f_1(\varphi) \quad \text{na } x^2 + y^2 = 1$$
$$u(x,y) = f_2(\varphi) \quad \text{na } x^2 + y^2 = 4,$$

kde f_1 a f_2 jsou 2π periodické spojité funkce, φ označuje úhlovou proměnnou v polárních souřadnicích.

8) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u(0,x) = x(\ell - x)$ $\quad u(t,0) = u(t,\ell) = 0$

$\quad u_t(0,x) = 0$

na $(0,T)\times(0,\ell)$

Řešení budeme hledat ve tvaru $u(t,x) = T(t)X(x)$. Pak

$$T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \quad \text{, tj.} \quad \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$ Vlevo je fce v proměnné t, vpravo fce v proměnné x a rovnají se $\forall t,x \Rightarrow$ musí být rovny stejné konstantě λ.

- $X''(x) = \lambda X(x)$ s okrajovými podmínkami $X(0) = X(\ell) = 0$

  Je-li $\lambda > 0$, obecné řešení je $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ a okrajové podmínky splňuje jen $C_1 = C_2 = 0$

  Je-li $\lambda = 0$, obecné řešení je $X(x) = C_1 x + C_2$ a —— " —— " —— $C_1 = C_2 = 0$

  Je-li $\lambda < 0$, obecné řešení je $X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\,x$. $X(0) = 0$ dá $C_1 = 0$

  $X(\ell) = 0$ dá $C_2 \cdot \sin\sqrt{-\lambda}\,\ell = 0$

  Abychom našli nenulové řešení, musí být $\sqrt{-\lambda}\,\ell = k\cdot\pi$, tedy $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}$

  Tedy pro $k = 1,2,\dots$ máme $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}$ a řešení $X_k(x) = C_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$.

- $T''(t) = -\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} c^2 T(t)$. To je téměř stejná rce jako pro $X(x)$ a máme tak řešení

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\pi c k t}{\ell} + B_k \sin\frac{\pi c k t}{\ell}$$

a konečně $u_k(t,x) = \left(a_k \cos\frac{\pi c k t}{\ell} + b_k \sin\frac{\pi c k t}{\ell}\right)\cdot \sin\frac{\pi k x}{\ell}$, kde $a_k = A_k C_k$, $b_k = B_k C_k$

Toto je řešení pro každé $k \in \mathbb{N}$, rovnice je lineární $\Rightarrow$ součet řešení je také řešení $\Rightarrow$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{\pi c k t}{\ell} + b_k \sin\frac{\pi c k t}{\ell}\right) \sin\frac{\pi k x}{\ell}$$

a_k, b_k určíme z poč. podmínek: $t = 0$: $u(0,x) = x(\ell - x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k x}{\ell}$

ozn. vzniklou fci $\tilde{f}$

Potřebujeme rozvinout $x(\ell - x)$ do sinové řady na $(0,\ell)$ $\Rightarrow$ prodloužíme liše a rozvineme do Fourierovy řady na $(-\ell,\ell)$: ozn. vzniklé F. koeficienty jako $\tilde{b}_k$: $\tilde{b}_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x) \sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx =$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell x(\ell - x)\sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx = \frac{2}{\cancel{\ell}}\int_0^\ell x \sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx - \frac{2}{\ell}\int_0^\ell x^2 \sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx = 2\left[x\cdot\left(-\cos\frac{k\pi}{\ell}x\right)\cdot\frac{\ell}{k\pi}\right]_0^\ell + 2\int_0^\ell \cos\frac{k\pi}{\ell}x\cdot\frac{\ell}{k\pi}\,dx$$

$$+ \frac{2}{\ell}\left[x^2\cdot\cos\frac{k\pi}{\ell}x\cdot\frac{\ell}{k\pi}\right]_0^\ell - \frac{4}{\ell}\cdot\frac{\ell}{k\pi}\int_0^\ell x\cos\frac{k\pi}{\ell}x\,dx = -\frac{2\ell^2}{k\pi}\cdot(-1)^k + \frac{2\ell}{k\pi}\cdot\frac{\ell}{k\pi}\cdot\underbrace{\left[\sin\frac{k\pi}{\ell}x\right]_0^\ell}_{=0} + \frac{2\ell^2}{k\pi}\cdot(-1)^k -$$

$$-\frac{4}{k\pi}\left(\underbrace{\left[x\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x\cdot\frac{\ell}{k\pi}\right]_0^\ell}_{=0} - \frac{\ell}{k\pi}\int_0^\ell \sin\frac{k\pi}{\ell}x\,dx\right) = -\frac{4\ell}{k^2\pi^2}\cdot\frac{\ell}{k\pi}\cdot\left[\cos\frac{k\pi}{\ell}x\right]_0^\ell = -\frac{4\ell^2}{k^3\pi^3}\cdot\underbrace{\left((-1)^k - 1\right)}_{=0 \text{ pro } k \text{ sudé}}$$

$\Rightarrow a_k = \tilde{b}_k = 0$ pro $k = 2m$ a $a_{2m+1} = \tilde{b}_{2m+1} = \frac{8\ell^2}{(2m+1)^3\pi^3}$

Druhá poč. podmínka: $u_t(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(-a_k \cdot \frac{\pi c k}{l} \sin\frac{\pi c k t}{l} + b_k \frac{\pi c k}{l} \cos\frac{\pi c k t}{l}\right) \sin\frac{\pi k x}{l}$

$$0 = u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\pi c k}{l} \cdot \sin\frac{\pi k x}{l} \Rightarrow b_k = 0.$$

Hledané řešení je $u(t,x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{8l^2}{(2m+1)^3\pi^3} \cdot \cos\frac{\pi c(2m+1)t}{l} \sin\frac{\pi(2m+1)x}{l}$

9, DÚ

10, $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u(0,x) = xe^{-x} \quad u(t,0) = u_x(t,l) = 0$

na $(0,T) \times (0,l)$. Opět hledáme řešení $u(t,x) = T(t)X(x)$

$$\Rightarrow T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Začátek stejně jako příklad 8, $X_k(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$. $X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

dále ale chceme $X'(l) = 0$. $X'(x) = C_2\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}x$

$X'(l) = C_2\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}l = 0$

$\Rightarrow \sqrt{-\lambda}l = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k = 0,1,2,\dots \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \Rightarrow \lambda_k = -\frac{1}{l^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2$

a $X_k(x) = C_k \sin\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x$

Druhá rovnice: $\frac{T_k'(t)}{T_k(t)} = -\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2 \Rightarrow T_k(t) = A_k \cdot \exp\left(-\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2 t\right)$

$\Rightarrow$ Řešení je ve tvaru $u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \exp\left(-\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)$

Poč. podmínka: $xe^{-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)$ na $(0,l)$. Protože jde o vlastní fce, fy tvoří úplný ortogonální systém, přestože technicky vzato nejde o trigonometrický systém s fcemi $\sin\frac{k\pi}{l}x$ kvůli členu $\frac{\pi}{2}$. $\int_0^l \sin^2\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)dx = \frac{l}{2} \Rightarrow a_k = \frac{2}{l}\int_0^l xe^{-x} \sin\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)dx$

To vyřešíme per partes a po dlouhém počítání dojdeme k výsledku

$$a_k = \frac{1}{\left(\frac{1}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2+1\right)^2} \cdot \left(\frac{4}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) - e^{-l}\cdot(-1)^k \cdot \left[l\left(\frac{1}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2+1\right) - \frac{1}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2+1\right]\cdot\frac{2}{l}\right)$$

Poznámka: počáteční podmínka xe^{-x} v bodě $x = l$ není kompatibilní s okrajovou podmínkou $u_x(l) = 0$.

To nastane jen pro $l = 1$, protože $(xe^{-x})' = (1-x)e^{-x}\big|_{x=l} = (1-l)e^{-l} = 0$ jen pro $l = 1$.

M) $\Delta u = 0$ na $\Omega = \{(x,y): 1 < x^2+y^2 < 4\}$ $\quad u(x,y) = f_1(\varphi)$ na $x^2+y^2=1$

$u(x,y) = f_2(\varphi)$ na $x^2+y^2=4$

Převod do polárních souřadnic: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

$\Rightarrow$ Řešíme $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ na $r \in (1,2)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$

$u(1,\varphi) = f_1(\varphi)$

$u(2,\varphi) = f_2(\varphi)$

$u(r,0) = u(r,2\pi)$

Zvolíme $u(r,\varphi) = R(r)\phi(\varphi)$

Pak $R''(r)\phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}\phi''(\varphi)R(r) = 0$

$$\frac{r^2\left(R''(r) + \frac{R'(r)}{r}\right)}{R(r)} = -\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = \lambda$$

Hledáme 2π-periodické řešení rovnice $\phi''(\varphi) = -\lambda\phi(\varphi)$. To najdeme jen pro $\lambda > 0$, kdy

$\phi(\varphi) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\varphi$ $\quad \phi(0) = C_1 = \phi(2\pi) = C_1\cos\sqrt{\lambda}2\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}2\pi$

To zařídíme volbou $\sqrt{\lambda} = k$, $k = 0,1,2,\dots$ (tj. $\lambda = k^2$)

a $\phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi$, pro $k=0$ pak $\phi_0(\varphi) = \frac{a_0}{2}$

Rovnice pro R: $r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0$. To je Eulerova rovnice

$r = e^t$, $Z(t) = R(e^t)$

$Z'(t) = R'(e^t)e^t$

$Z''(t) = R''(e^t)(e^t)^2 + R'(e^t)e^t = R''(r)r^2 + R'(r)r$

$\Rightarrow Z''(t) - k^2Z(t) = 0 \quad \Rightarrow Z(t) = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}$ $\quad$ | pro $k=0$ $Z(t) = C_1 + C_2t$

$\Rightarrow R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k}$ $\quad$ | $R_0(r) = C_1 + C_2 \ln r$

Linearita $\Rightarrow$ Sečteme přes všechna k

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + d_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k r^k + d_k r^{-k}\right)\left(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right)$$

Někdy se hodí jiný zápis: $u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + d_0 \ln r + \sum r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$
(využíváme kraje $r=1, r=2$) $\quad + \sum \left(\frac{2}{r}\right)^k (c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi)$

Okr. podm.: $f_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k + 2^k c_k)\cos k\varphi + (b_k + 2^k d_k)\sin k\varphi$

$f_2(\varphi) = \frac{a_0}{2} + d_0 \ln 2 + \sum_1^{\infty} (2^k a_k + c_k)\cos k\varphi + (2^k b_k + d_k)\sin k\varphi$

Z této soustavy pak vyřešíme a_k, b_k, c_k, d_k rozvinutím $f_1(\varphi)$ a $f_2(\varphi)$ do Fourierových řad.