

1.) Ve smyslu hlavní hodnoty spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(x)}{(x-3)(x^2+2)} dx. \quad (8 \text{ bodů})$$

2.) Pro kladný parametr a spočtěte integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(ax)}{(x+1)^2} dx, \quad (10 \text{ bodů})$$

bez důkazu můžete použít fakt, že

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

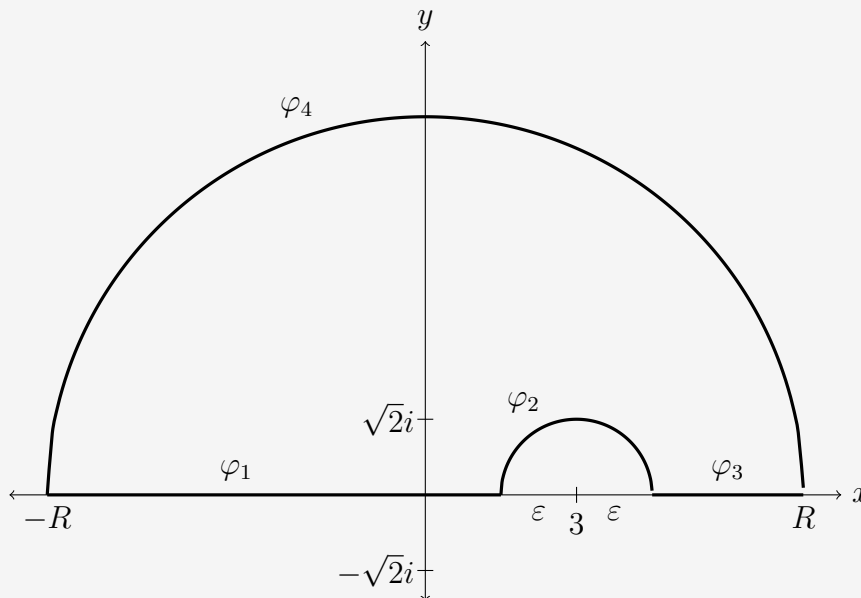
1.) Ve smyslu hlavní hodnoty spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(x)}{(x-3)(x^2+2)} dx. \quad (8 \text{ bodů})$$

Řešení: Jde o velice standardní případ na použití Jordanova lemmatu. Nejprve si rozmyslíme, že pro reálná x můžeme integrál psát jako

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(x)}{(x-3)(x^2+2)} dx = \operatorname{Re} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{xi}}{(x-3)(x^2+2)} dx}_J = \operatorname{Re} J.$$

Nyní si rozmyslíme po jaké křivce chceme integrovat. Chceme uzavřít interval $[-R, R]$, to uděláme polokružnicí v horní polorovině. Zároveň se ale musíme vyhnout singularitě na reálné ose v bodě 3. Budeme tedy integrovat přes půlměsíc s "vykouslým zubem".



Tím jsme získali uzavřenou křivku φ přesně pro použití reziduovy věty. Definujme novou komplexní funkci $f(z) = \frac{z^2 e^{zi}}{(z-3)(z^2+2)}$. Pak víme,

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_{\varphi_1} f(z) dz + \int_{\varphi_2} f(z) dz + \int_{\varphi_3} f(z) dz + \int_{\varphi_4} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{\sqrt{2}i} f(z)$$

Nyní zalimitme rovnici pro $R \rightarrow \infty$ a $\epsilon \rightarrow 0^+$. Pravá strana na těchto parametrech nezávisí (jakmile je pól $\sqrt{2}i$ vevnitř křivky). Nalevo máme zčásti

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\varphi_1} f(z) dz + \int_{\varphi_3} f(z) dz \right] = J.$$

V integrálu přes φ_2 obíháme pól násobnosti 1, tedy použijeme přesně lemma říkájící (limitu přes R můžeme vypustit, protože tento integrál na něm stejně nezávisí)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varphi_2} f(z) dz = i(\beta - \alpha)A = -i\pi \lim_{z \rightarrow 3} f(z)(z-3) = -i\pi \frac{9}{11} e^{3i} = \frac{9\pi}{11} (\sin(3) - i \cos(3)).$$

Nakonec se podíváme na integrál přes φ_4 , ten pošleme do 0 díky Jordanovu lemmatu. Vidíme, že $f(z)$ je přesně funkce z předpokladů (splňuje spojitost a tak dále), dokonce s exponentem $\alpha zi = zi$, tedy $\alpha = 1$. Stačí nám tedy, aby $M_\rho \rightarrow 0$ když $\rho \rightarrow \infty$.

$$M_\rho \sim \frac{\rho^2}{(\rho - 3)(\rho^2 + 2)} \sim \frac{1}{\rho} \rightarrow 0$$

Vidíme, že zde je použití Jordanova lemmatu opravdu důležité, protože pouhým odhadem integrálu typu "hodnota funkce \times délka křivky" bychom dostali asymptotické chování $\rho M_\rho = 1$, což nejde k nule. Kladné α a horní polorovina jsou esenciální.

Na druhé straně rovnice máme spočítat reziduum v bodě $\sqrt{2}i$. Jedná se o jednonásobný pól, tedy přes jednoduchý vzoreček dostáváme

$$\text{Res}_{\sqrt{2}i} = \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}i} f(z)(z - \sqrt{2}i) = \frac{-2e^{-\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}i - 3)2\sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}(3 + \sqrt{2}i)}{11 \cdot 2i}$$

Celkově nám z reziduové věty vypadne vztah

$$J + \frac{9\pi}{11} (\sin(3) - i \cos(3)) = 2\pi i \frac{\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}(3 + \sqrt{2}i)}{11 \cdot 2i},$$

ze kterého už jen drobnými úpravami čteme výsledek

$$I = \text{Re } J = \frac{3\pi}{11} \left(\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} - 3 \sin(3) \right)$$

□

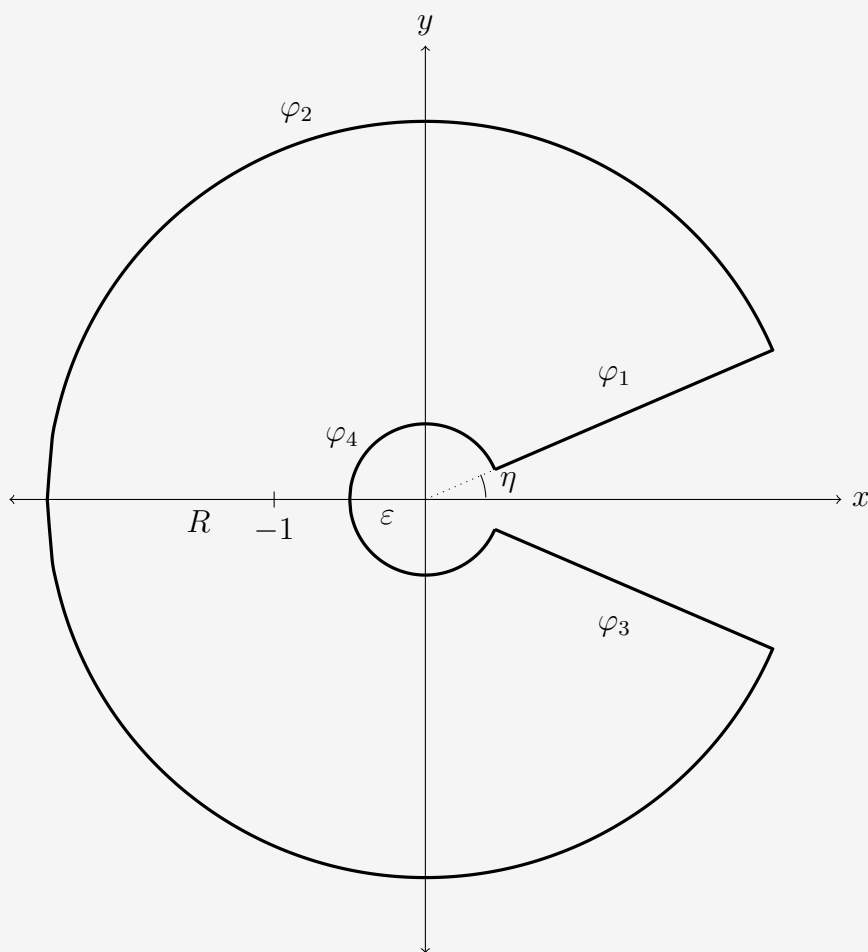
2.) Pro kladný parametr a spočítejte integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(ax)}{(x+1)^2} dx, \quad (10 \text{ bodů})$$

bez důkazu můžete použít fakt, že

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Řešení: K počítání komplexního integrálu s logaritmem a odmocninou je zapotřebí si zvolit jakou větev komplexního logaritmu budeme používat. Zde to rozhodnutí jde ruku v ruce s volbou integrační křivky. Vybereme si Pac-mana směrem kladné reálné osy a přesně tu vyjmeme z definičního oboru našeho logaritmu. Bereme tedy argumenty komplexních čísel z intervalu $(0, 2\pi)$.



Integrovanou funkci si opět rozšíříme do komplexní roviny, tentokrát velmi přímočaře jako

$$f(z) = \frac{\sqrt{z} \ln(az)}{(z+1)^2} dz$$

a podíváme se, co nám o integrování po uzavřené křivce φ řekne reziduová věta. Klasicky platí, že

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_{\varphi_1} f(z) dz + \int_{\varphi_2} f(z) dz + \int_{\varphi_3} f(z) dz + \int_{\varphi_4} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1} f(z).$$

Podívejme se pozorně na jednotlivé části křivky a k čemu jejich integrály konvergují v limitě $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ a $\eta \rightarrow 0^+$. K tomu se nám bude hodit znát jejich parametrizace:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= te^{\eta i}, & \text{pro } t \in [\varepsilon, R] \\ \varphi_2(t) &= Re^{ti}, & \text{pro } t \in [\eta, 2\pi - \eta] \\ \varphi_3(t) &= te^{(2\pi - \eta)i}, & \text{pro } t \in [R, \varepsilon] \\ \varphi_4(t) &= \varepsilon e^{\eta i}, & \text{pro } t \in [2\pi - \eta, \eta]\end{aligned}$$

Začneme s integrálem přes φ_1 : dosadíme parametrizaci (převědeme na klasický Lebesgueův integrál) a zlimitujeme všechny tři parametry.

$$\int_{\varphi_1} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{\sqrt{t} e^{\frac{\eta i}{2}} (\ln(at) + \eta i) e^{\eta i}}{(te^{\eta} + 1)^2} dt \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t} \ln(at)}{(t+1)^2} dt = I$$

To stejné provedeme s částí φ_3 :

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_3} f(z) dz &= \int_R^{\varepsilon} \frac{\sqrt{t} e^{\frac{2\pi - \eta}{2} i} (\ln(at) + (2\pi - \eta)i) e^{(2\pi - \eta)i}}{(te^{(2\pi - \eta)} + 1)^2} dt \rightarrow \int_{\infty}^0 \frac{\sqrt{t} e^{\pi i} (\ln(at) + 2\pi i)}{(t+1)^2} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t} \ln(at)}{(t+1)^2} dt + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2} dt = I + \pi^2 i,\end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti využili nápovědu v zadání.

Dále se podívejme na integrál přes velký oblouk φ_2 . Integrujeme přes obě poloroviny, to nám ale nevadí jelikož stejně nevyužíváme verzi s exponenciálou (máme $\alpha = 0$). Stačí jen argumentovat, že

$$\rho M_{\rho} \sim \rho \frac{\sqrt{\rho} \ln(a\rho)}{(\rho+1)^2} \sim \frac{\ln(a\rho)}{\sqrt{\rho}} \rightarrow 0.$$

Proto

$$\int_{\varphi_2} f(z) dz \rightarrow 0.$$

Nakonec se podíváme na integrál přes φ_4 , který odhadneme jako "hodnota funkce \times délka křivky"

$$\left| \int_{\varphi_4} f(z) dz \right| \leq C \left(\frac{\sqrt{\varepsilon} \ln(a\varepsilon)}{(\varepsilon+1)^2} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(\varepsilon+1)^2} \right) 2\pi\varepsilon \leq \tilde{C} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \ln(a\varepsilon) \rightarrow 0$$

Nyní už zbývá pouze dopočítat reziduum v -1 . Zde se jedná o pól násobnosti 2, proto musíme použít obecný vzorec s derivací. Zde poznamenejme, že z věty o derivaci inverzní funkce pro komplexní čísla vyplývá, že na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ můžeme komplexní logaritmus derivovat a jeho derivace je rovna standardně $\frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{-1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -1} [f(z)(z+1)^2]' = \lim_{n \rightarrow -1} [\sqrt{z} \ln(az)]' = \lim_{n \rightarrow -1} \frac{\ln(az)}{2\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{z}}{az} a = \\ &= \frac{\ln(a) + \pi i}{2i} + \frac{i}{-1}\end{aligned}$$

V poslední rovnosti využíváme faktu, že $-1 = e^{\pi i}$. Dáme-li všechny poznatky dohromady, dostáváme

$$2I + \pi^2 i = 2\pi i \left(\frac{\ln(a) + \pi i}{2i} - i \right)$$
$$I = \frac{\pi}{2} (\ln(a) + 2).$$

Můžeme jednoduše dosadit například $a = 3$ a číst

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \ln(3x)}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi}{2} (\ln(3) + 2)$$

□