1.) Na intervalu $(-\pi, \pi]$ rozviňte funkci $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, do trigonometrické Fourierovy řady. Diskutujte konvergenci dané řady a dosazením vhodného bodu spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}.$$

(10 bodů)

2.) V závislosti na parametru $s \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}; 2; 6\right\}$ určete hodnotu integrálu

$$\int\limits_{|z-s|=2} \frac{e^z}{(z-4)^2(z+s+i)}\,\mathrm{d}z, \qquad \textit{(8 bodů)}$$

kde křivku obíháme v kladném směru.

1.) Na intervalu $(-\pi, \pi]$ rozviňte funkci $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, do trigonometrické Fourierovy řady. Diskutujte konvergenci dané řady a dosazením vhodného bodu spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}. \qquad (\textit{10 bodů})$$

Řešení: Interval má standardní délku 2π, prodloužíme tedy naši funkci periodicky na celé $\mathbb{R}$ s délkou periody 2π. Začneme hledat Fourierovy koeficienty z definice. Udělejme nyní poznámku, že uvažujeme pouze $\alpha \neq 0$, jinak je funkce konstanta a Fourierův rozvoj je pro ni triviální (sama je bázovou funkcí).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{\alpha\pi} = \frac{2\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$$

Dále spočítáme koeficienty a_n pomocí dvojtého per partes. Všimneme si, že během výpočtu se nám mezi výrazy objeví také předpis pro koeficienty b_n, jejich výpočet si tak později usnadníme.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}\cos(nx)\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x} & \to u' = \alpha e^{\alpha x} \\ v' = \cos(nx) & \to v = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{array} \right| = \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi n}\left[e^{\alpha x}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{\alpha}{n}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}\sin(nx)\, \mathrm{d}x}_{=b_n} = \left| \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x} & \to u' = \alpha e^{\alpha x} \\ v' = \sin(nx) & \to v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{array} \right| = \\
&= \frac{\alpha}{\pi n^2}\left[e^{\alpha x}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{\alpha^2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}\cos(nx)\, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{\alpha}{\pi n^2}\left(e^{\alpha\pi}\cos(\pi n) - e^{-\alpha\pi}\cos(-\pi n)\right) - \frac{\alpha^2}{n^2}a_n \\
a_n &= (-1)^n\frac{2\alpha}{\pi n^2}\sinh(\alpha\pi) - \frac{\alpha^2}{n^2}a_n
\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)a_n &= (-1)^n\frac{2\alpha}{\pi n^2}\sinh(\alpha\pi) \\
a_n &= (-1)^n\frac{2\alpha}{\pi\left(n^2+\alpha^2\right)}\sinh(\alpha\pi).
\end{aligned}$$

Pro výpočet koeficientů b_n využijeme první dva řádky našich předchozích kalkulací, které říkají, že

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 - \frac{\alpha}{n}b_n \\
b_n &= -\frac{n}{\alpha}a_n = -\frac{n}{\alpha}(-1)^n\frac{2\alpha}{\pi\left(n^2+\alpha^2\right)}\sinh(\alpha\pi) \\
b_n &= (-1)^{n+1}\frac{2n}{\pi\left(n^2+\alpha^2\right)}\sinh(\alpha\pi).
\end{aligned}$$

Celá Fourierova řada vypadá tedy následovně

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\ &= \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\pi\left(n^2+\alpha^2\right)} \sinh(\alpha\pi)\cos(nx) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{\pi\left(n^2+\alpha^2\right)} \sinh(\alpha\pi)\sin(nx). \end{aligned}$$

Nyní uděláme pár komentářů ke konvergenci dané řady abychom věděli, zda opravdu můžeme psát mezi funkcí a řadou znaménko "=". Víme, že na intervalech, kde je rozváděná funkce spojitá a po částech spojitě diferencovatelná, tam částečné součty konvergují lokálně stejnoměrně k původní funkci. U nás funkce $e^{\alpha x}$ splňuje podmínky na $(-\pi, \pi)$, zde tedy rovnost mezi řadou a funkcí platí. Ovšem v bodech $\pi + 2k\pi$ nastává u prodloužené 2π-periodické funkce k nespojitosti. Tam tato konvergence (znaménko "=") neplatí, místo toho tam řada konverguje bodově k aritmetickému průměru jednostranných limit, tedy v našem případě

$$\frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{2} = \cosh(\alpha\pi).$$

Posledním úkolem je dosadit správný bod a spočítat tak součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}.$$

Všimněme si, že koeficienty u sinů mají nadbytečné n v čitateli a neshodují se se členy, které chceme sčítat. Zkusíme tedy sinovou část řady vyeliminovat dosazením bodu π. Tím zároveň vyrobíme z $\cos(nx)$ přesně $(-1)^n$, které v kosinových koeficientech pokrátí svoji druhou kopii. Jelikož bereme krajní bod intervalu (bod nespojitosti), pamatujeme k čemu zde řada konverguje ($\cosh(\alpha\pi)$) a píšeme

$$\cosh(\alpha\pi) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sinh(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}.$$

Nyní už stačí jen a pouze dosadit za $\alpha = \sqrt{3}$ a číselnou řadu vyjádřit z rovnice

$$\cosh\left(\sqrt{3}\pi\right) = \frac{\sinh\left(\sqrt{3}\pi\right)}{\sqrt{3}\pi} + \frac{2\sqrt{3}\sinh\left(\sqrt{3}\pi\right)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} = \frac{\sqrt{3}\pi \frac{\cosh\left(\sqrt{3}\pi\right)}{\sinh\left(\sqrt{3}\pi\right)} - 1}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi \coth\left(\sqrt{3}\pi\right) - 1}{6}$$

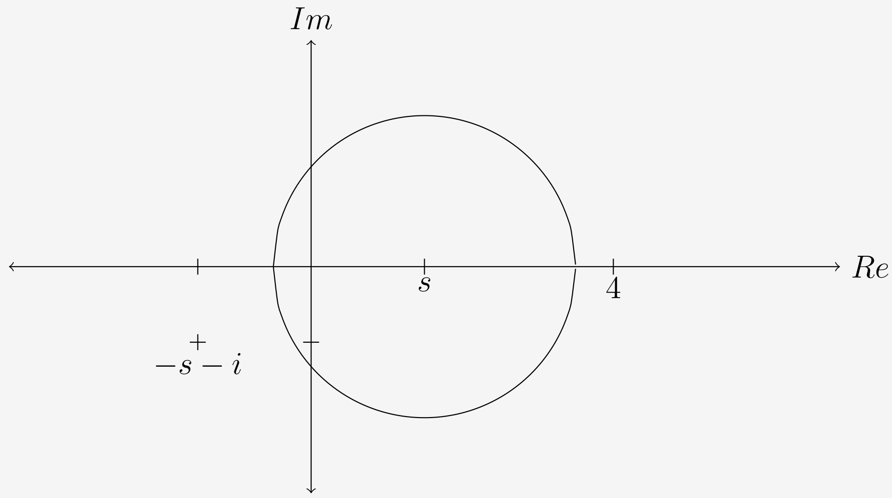
$\square$

2.) V závislosti na parametru $s \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}; 2; 6\right\}$ určete hodnotu integrálu

$$\int\limits_{|z-s|=2} \frac{e^z}{(z-4)^2(z+s+i)}\,\mathrm{d}z, \qquad (8\ bodů)$$

kde křivku obíháme v kladném směru.

Řešení: Nejprve si uvědomíme, o jakou křivku jde. Zápis $|z-s| = 2$ čteme jako "body z, které mají od reálného čísla s vzdálenost 2", je to tedy kružnice se středem v bodě s a poloměrem 2. Je to tedy uzavřená křivka. Pokud by v jejím vnitřku byla integrovaná funkce holomorfní, byl by integrál triviálně nulový. Funkce uvnitř však má dva body singularity a to $z = 4$ a $z = -s - i$. Podívejme se pro jaké hodnoty parametru s jsou tyto body uvnitř naší kružnice.



To můžeme nahlédnout z obrázku nebo jednoduše vyšetřit nerovnice

$$\begin{aligned} |4-s| &< 2 \\ (4-s)^2 &< 4 \\ s &\in (2,6), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |-s-i-s| &< 2 \\ (-2s)^2+1 &< 4 \\ 4s^2 &< 3 \\ s &\in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Vidíme, že v kružnici nikdy nejsou obě singularity naráz. Proto můžeme použít Cauchyho vzorec pro integrál přes uzavřenou křivku z funkce s jedním pólem uvnitř. V první řadě pro $s \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ definujme funkci

$$f_1(z) = \frac{e^z}{(z-4)^2},$$

která holomorfní uvnitř naší kružnice (pro daná s). Integrál tak můžeme psát jako

$$I(s) = \int\limits_{|z-s|=2} \frac{e^z}{(z-4)^2(z+s+i)}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{|z-s|=2} \frac{f_1(z)}{z+s+i}\,\mathrm{d}z \underbrace{=}_{\text{Cauchyho vzorec}} 2\pi i f_1(-s-i) =$$
$$= 2\pi i \frac{e^{-s-i}}{(-s-i-4)^2}.$$

V druhém případě pro $s \in (2,6)$ je uvnitř kružnice bod 4. Pro tento případ definujme funkci

$$f_2(z) = \frac{e^z}{z+s+i} \qquad f_2'(z) = e^z \frac{z+s+i-1}{(z+s+i)^2}$$

a opět použijme Cauchyho vzorec

$$I(s) = \int\limits_{|z-s|=2} \frac{e^z}{(z-4)^2(z+s+i)}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{|z-s|=2} \frac{f_2(z)}{(z-4)^2}\,\mathrm{d}z \underbrace{=}_{\text{Cauchyho vzorec}} 2\pi i f_2'(4) =$$
$$= 2\pi i e^4 \frac{3+s+i}{(4+s+i)^2}.$$

Mimo tyto intervaly je vnitřek kružnice holomorfní a integrál je nulový. Celkově tedy

$$I(s) = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{e^{-s-i}}{(-s-i-4)^2} & \text{pro } s \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ 2\pi i e^4 \dfrac{3+s+i}{(4+s+i)^2} & \text{pro } s \in (2,6), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

□