

Domácí úkol 9

Termín odevzdání: středa 20. 5. 2026 do večera

1.)

Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \frac{\cosh(ax)}{\cosh(\pi x)}, \quad 0 \leq a < \pi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Výsledek upravte do tvaru reálné funkce $\hat{f}(\xi, a)$.

Řešení: Vyjdeme klasicky z definice Fourierovy transformace

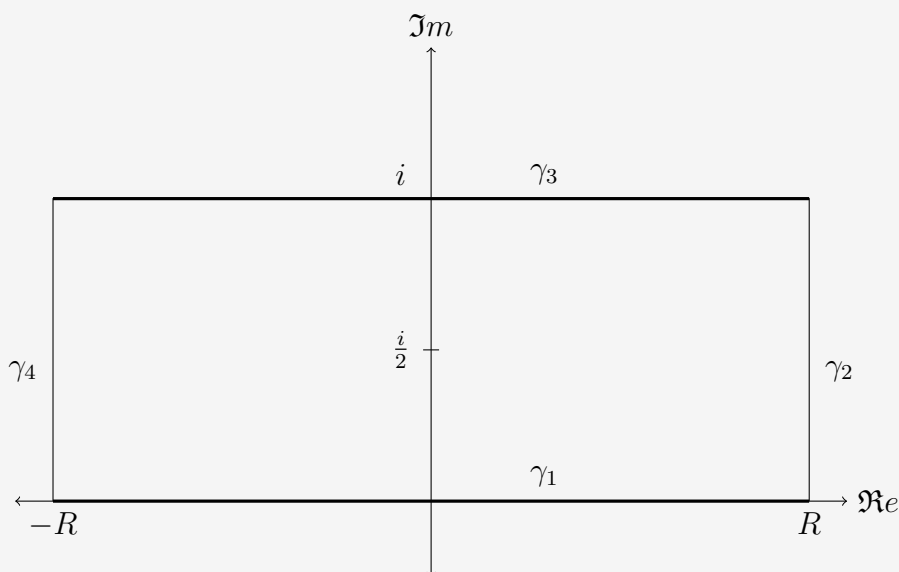
$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(\pi x)} e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Nyní ještě rozepíšeme hyperbolický kosinus na exponenciály a dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(a-2\pi i \xi)x} + e^{(-a-2\pi i \xi)x}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} dx.$$

To je klasický příklad na reziduovou větu s exponenciálami a integrováním přes dlouhý obdélník. Jelikož chceme to, aby byl jmenovatel stejný (minimálně až na znaménko) také na horní podstavě, zvolíme obdélník s výškou 1. Rovnou si rozmysleme, kde leží singularity naší funkce. Je to v bodech, kde je jmenovatel nulový, tedy

$$\begin{aligned} e^{\pi x} + e^{-\pi x} &= 0 & 2\pi x &= \pi i + 2k\pi i \\ e^{2\pi x} &= -1 & x &= \frac{i}{2} + ki \end{aligned}$$



Rozdělme integrál na dvě části, vyřešíme první z nich:

$$I_a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(a-2\pi i\xi)x}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} dx,$$

druhá polovina I_{-a} by se vyřešila analogicky.

začneme s identifikací limit pro integrály přes jednotlivé části obdélníku. Je zjevné, že

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{(a-2\pi i\xi)z}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{(a-2\pi i\xi)t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} dt = I_a$$

Dále se podíváme na část γ_3 . Zde nám zbude netriviální faktor v čitateli

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} \frac{e^{(a-2\pi i\xi)z}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{-R} \frac{e^{(a-2\pi i\xi)(t+i)}}{e^{\pi(t+i)} + e^{-\pi(t+i)}} dt = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} - \int_{-R}^R e^{ai+2\pi\xi} \frac{e^{(a-2\pi i\xi)t}}{-(e^{\pi t} + e^{-\pi t})} dt = e^{ai+2\pi\xi} I_a. \end{aligned}$$

U úseků γ_2 a γ_4 si stačí rozmyslet, že hodnoty naší funkce zde rychle klesají do nuly (především díky odhadu $a < \pi$ roste jmenovatel vždy rychleji než čítec). Proto platí

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{(a-2\pi i\xi)z}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} \frac{e^{(a-2\pi i\xi)z}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} dz = 0$$

Z reziduové věty pak přímo plyne

$$(1 + e^{ai+2\pi\xi}) I_a = 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{i}{2}} f(z).$$

Při počítání rezidia musíme dát pozor na to, že ačkoli je $\frac{i}{2}$ jednonásobný kořen jmenovatele, není to pouhý lineární polynom, nýbrž rozdíl exponenciál. Buď to můžeme opatrně počítat limitu, nebo jmenovatele zderivujeme a dostaneme

$$\operatorname{Res}_{\frac{i}{2}} f(z) = \lim_{x \rightarrow \frac{i}{2}} \frac{e^{\frac{ai}{2} + \pi\xi}}{\pi e^{\pi x} - \pi e^{-\pi x}} = \frac{e^{\frac{ai}{2} + \pi\xi}}{2\pi i}.$$

Celkově tedy platí, že

$$I_a = \frac{e^{\frac{ai}{2} + \pi\xi}}{1 + e^{ai+2\pi\xi}} \quad I_{-a} = \frac{e^{-\frac{ai}{2} + \pi\xi}}{1 + e^{-ai+2\pi\xi}}$$

Poslední úpravy nám pak dají

$$\begin{aligned} I_a + I_{-a} &= \frac{e^{\frac{ai}{2} + \pi\xi} (1 + e^{-ai+2\pi\xi}) + e^{-\frac{ai}{2} + \pi\xi} (1 + e^{ai+2\pi\xi})}{1 + e^{ai+2\pi\xi} + e^{-ai+2\pi\xi} + e^{4\pi\xi}} = \\ &= \frac{e^{\frac{ai}{2} + \pi\xi} + e^{-\frac{ai}{2} + 3\pi\xi} + e^{-\frac{ai}{2} + \pi\xi} e^{\frac{ai}{2} + 3\pi\xi}}{e^{2\pi\xi} (e^{2\pi\xi} + e^{-2\pi\xi} + e^{ai} + e^{-ai})} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{ai}{2}} (e^{\pi\xi} + e^{-\pi\xi}) + e^{-\frac{ai}{2}} (e^{\pi\xi} + e^{-\pi\xi})}{\cosh(2\pi\xi) + \cos(a)} = \frac{2 \cosh(\pi\xi) \cos(\frac{a}{2})}{\cosh(2\pi\xi) + \cos(a)} \end{aligned}$$

□