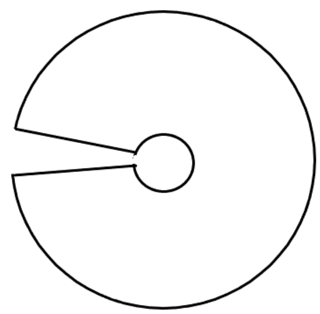
Početní část 2 - 7.6.2022

3. (a) Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{1}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx.$$
   (b) Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx.$$
   Návod: uvažujte integrál $\int_\gamma \frac{\log^3 z}{(4+z^2)(1+z^2)}\,dz$, kde log je větev logaritmu s argumentem s hodnotami v $(-\pi,\pi)$ a γ je křivka naznačená na obrázku a využijte výsledek z předchozího bodu. U použité křivky nezapomeňte popsat její parametrizaci.

   (12 bodů)



Řešení:

Funkce $f(z) = \dfrac{1}{(4+z^2)(1+z^2)}$ má pól násobnosti 1 ve bodech $\pm i, \pm 2i$. Snadno spočteme

$$\operatorname{Res}(f,\pm i) = \mp\frac{i}{6}, \quad \operatorname{Res}(f,\pm 2i) = \pm\frac{i}{12}.$$

Standardní aplikací Jordanova lemmatu tedy dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(z)\,dx \\ &= i\pi\left(\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,2i)\right) \\ &= i\pi\left(-\frac{i}{6} + \frac{i}{12}\right) = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

Pro výpočet druhého integrálu uvažme $\varepsilon > 0$, $0 < r < R$ a křivku $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$, kde

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (R - t + r)e^{i(\varepsilon+\pi)}, \quad t \in (r, R), \\ \gamma_2(t) &= re^{-it}, \quad t \in (-\varepsilon - \pi, \varepsilon + \pi), \\ \gamma_3(t) &= te^{-i(\varepsilon+\pi)}, \quad t \in (r, R), \end{aligned}$$

a

$$\gamma_4(t) = Re^{it}, \quad t \in (-\varepsilon - \pi, \varepsilon + \pi).$$

Pro R dostatečně velké a ε, r dostatečně malá a $g(z) = \dfrac{\log^3 z}{(4+z^2)(1+z^2)}$ platí

$$\int_\gamma g(z)\, dz = i2\pi(\operatorname{Res}(g, i) + \operatorname{Res}(g, -i) + \operatorname{Res}(g, 2i) + \operatorname{Res}(g, -2i))$$

Máme

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g, \pm i) &= \log^3(\pm i) \operatorname{Res}(f, \pm i) \\ &= (\log|\pm i| + \arg(\pm i))^3 \operatorname{Res}(f, \pm i) \\ &= \left(\pm i\frac{\pi}{2}\right)^3 \left(\frac{\mp i}{6}\right) = -\frac{\pi^3}{48}, \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g, \pm 2i) &= \log^3(\pm 2i) \operatorname{Res}(f, \pm 2i) \\ &= (\log|\pm 2i| + \arg(\pm 2i))^3 \operatorname{Res}(f, \pm 2i) \\ &= \left(\log 2 \pm i\frac{\pi}{2}\right)^3 \left(\frac{\pm i}{12}\right). \end{aligned}$$

Nejdříve upravíme

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g, 2i) + \operatorname{Res}(g, -2i) &= \left(\log 2 + i\frac{\pi}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{12}\right) + \left(\log 2 - i\frac{\pi}{2}\right)^3 \left(\frac{-i}{12}\right) \\ &= \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{4}\log^2 2. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\int_\gamma g(z)\, dz = i2\pi\left(-\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{4}\log^2 2\right) = -i\left(\frac{\pi^4}{24} + \frac{\pi^2}{2}\log^2 2\right).$$

Na druhou stranu, pošleme-li nejdříve $\varepsilon \to 0+$ a potom $R \to \infty$ a $r \to 0+$ dostáváme

$$\begin{aligned} \int_\gamma g(z)\, dz &= \int_{-\infty}^0 \frac{(\log|x| + i\pi)^3 - (\log|x| - i\pi)^3}{(4+x^2)(1+x^2)}\, dx \\ &= i6\pi \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(4+x^2)(1+x^2)}\, dx - i2\pi^3 \int_0^\infty \frac{1}{(4+x^2)(1+x^2)}\, dx \end{aligned}$$

Zde jsme využili, že příspěvek γ_4 jde v limitě k 0 díky Jordanovu lemmatu a příspěvek γ_2 jde v limitě k 0 díky faktu, že maximum velikosti integrandu se chová jako $|\log^3 r|$, zatímco délka křivky jde k nule jako r^2.

Celkem tedy dostáváme

$$-i\left(\frac{\pi^4}{24}+\frac{\pi^2}{2}\log^2 2\right) = i6\pi\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx + -i2\pi^3\cdot\frac{\pi}{12}.$$

což dává konečný výsledek

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{12}\log^2 2.$$