

## Domácí úkol 7

Termín odevzdání: pátek 24. 4. 2026 do večera

1.)

Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(2-x)(x^4+2x^2+1)} dx$$

ve smyslu hlavní hodnoty.

*Řešení:*

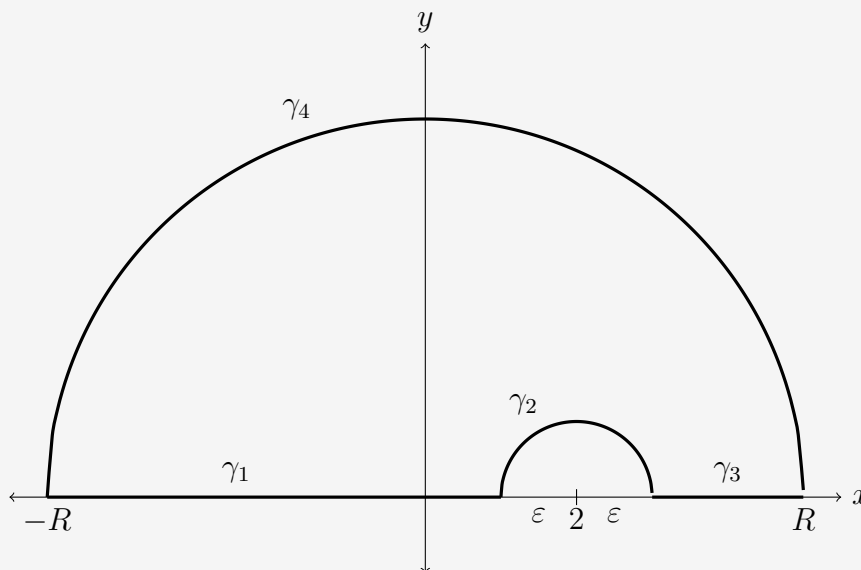
Tento příklad je vcelku standardní. Primitivní funkce k integrandu se hledá těžko, proto nebudeme používat Newtonův vzorec pro výpočet určitého integrálu, ale půjdeme na to přes reziduovou větu. Udělejme tedy z naší funkce funkci komplexní:

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(z)}{(2-z)(z^4+2z^2+1)} dz.$$

Jelikož integrujeme přes reálnou osu, čísla  $z$  jsou v integrandu stále reálná, můžeme proto integrál přepsat jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(e^{iz})}{(2-z)(z^4+2z^2+1)} dz = \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(2-z)(z^4+2z^2+1)} dz \right).$$

Na použití reziduové věty musíme integrovat přes uzavřenou křivku. Tu nyní sestrojíme. Část  $\gamma_1$  bude na reálné ose, celou reálnou osu parametrizovat nemůžeme, jelikož v bodě 2 má naše funkce singularitu - pól násobnosti 1. Ten musíme oběhnout po kružnicovém polooblouku  $\gamma_2$ . Dále pak budeme pokračovat na reálné ose po úsečce  $\gamma_3$ . Křivku pak uzavřeme velkým poloobloukem  $\gamma_4$  zpět na začátek.



Řešme dále

$$\mathfrak{J} = \int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4} \frac{e^{iz}}{(2-z)(z^4+2z^2+1)} dz.$$

Nyní se podívejme na limity jednotlivých částí (pro  $R \rightarrow \infty$  a  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ). Nejprve konstatujme, že námi hledaný integrál je

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_1 \oplus \gamma_3} \frac{e^{iz}}{(2-z)(z^4+2z^2+1)} dz,$$

který se limitami natáhne na celou reálnou osu. Zbylé dva segmenty jsou jistými pomocnými odbočkami, které chceme ve finále zanedbat. Pro  $\gamma_4$  nám postačí Jordanovo lemma: obíháme po polokružnici v horní polorovině, funkce je pro dostatečně velká  $R$  spojitá vně oblouku, exponent v exponenciále má hodnotu  $\alpha = 1$  a zbytek funkce se chová jako  $\sim \frac{1}{R^5}$ , tudíž má v nekonečnu dostatečně rychlý pokles. Můžeme tedy lemma použít a vyvodit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{(2-z)(z^4+2z^2+1)} dz = 0$$

Zbývá identifikovat integrál z části  $\gamma_2$ . Zde obíháme **pól násobnosti 1** a limitíme s poloměrem do 0, můžeme tak použít vzoreček z lemmatu *Obíhání pólu násobnosti 1*. Spočteme limitu

$$A = \lim_{z \rightarrow 2} f(z)(z-2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-e^{zi}}{z^4+2z^2+1} = -\frac{e^{2i}}{25}.$$

Jelikož pól obíháme po oblouku na části od úhlu  $\pi$  do 0, platí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{(2-z)(z^4+2z^2+1)} dz = -i\pi A = \frac{\pi i e^{2i}}{25}.$$

Rozluštili jsme k čemu konvergují integrály přes jednotlivé části křivky, viděli jsme, že část je integrál, který nás zajímá. Proto nyní spočteme přes rezidovou větu integrál přes celou uzavřenou křivku. Tento integrál se limitěním vůbec nemění, protože od jistého  $R$  a  $\varepsilon$  se počet singularit uzavřené křivkou nemění.

Rozložme jmenovatel podle vzorečku na součin, abychom určili singularity a jejich násobnosti

$$\frac{e^{zi}}{(2-z)(z+i)^2(z-i)^2}.$$

Vidíme, že jediná singularita, která se uvnitř křivky vyskytuje, je  $z = i$ , i když s násobností 2. Stačí spočítat jedno reziduum podle vzorce

$$\begin{aligned} \text{Res}_i f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{1!} (f(z)(z-i)^2)' = \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{e^{zi}}{(2-z)(z+i)^2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{ie^{zi}(2-z)(z+i)^2 - e^{zi}(-(z+i)^2 + 2(2-z)(z+i))}{(2-z)^2(z+i)^4} = \\ &= \frac{1}{100e} (7 - 24i). \end{aligned}$$

Pak podle reziduové věty máme

$$\mathcal{J} = 2\pi i \operatorname{Res}_i f(z) = 2\pi i \frac{1}{100e} (7 - 24i) = \frac{\pi}{50e} (24 + 7i).$$

Nyní stačí od integrálu přes celou křivku odečíst integrály přes části  $\gamma_2$  a  $\gamma_4$ , podle našich prvotních úvah platí

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \operatorname{Re} \left( \mathcal{J} - \frac{\pi i e^{2i}}{25} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{12\pi}{25e} + \frac{\pi}{25} \sin(2) + \left( \frac{7\pi}{50e} - \frac{\pi}{25} \cos(2) \right) i \right) = \\ &= \frac{\pi}{25e} (12 + e \sin(2)) \end{aligned}$$

□