

## Domácí úkol 6

Termín odevzdání: pátek 10. 4. 2026 do večera

1.)

Rozviňte následující funkci

$$f(z) = \frac{3z - 1}{z(z - i)^2}$$

do Laurentovy řady kolem bodu  $1 + i$  na mezikruží  $1 < |z - 1 - i| < \sqrt{2}$ .

*Řešení:* Máme rozvinout racionální funkci se jmenovatelem ve tvaru součinu, nejlepší první krok bude rozložit funkci na parciální zlomky

$$\frac{3z - 1}{z(z - i)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z - i)^2} + \frac{C}{z - i},$$

kde  $A$ ,  $B$  a  $C$  jsou tentokrát komplexní konstanty. Pronásobením dostaneme

$$\begin{aligned} 3z - 1 &= A(z^2 - 2zi - 1) + Bz + C(z^2 - zi) \\ 3z - 1 &= z^2(A + C) + z(-2iA + B - iC) + (-A) \end{aligned}$$

a jednoduchým vyřešením soustavy získáme

$$A = 1 \qquad B = 3 + i \qquad C = -1.$$

Můžeme tedy zvlášť rozvést tři části funkce  $f$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{3 + i}{(z - i)^2} - \frac{1}{z - i}.$$

Začneme s funkcí  $\frac{1}{z}$ . Tato funkce je holomorfní na celém kruhovém okolí bodu  $1 + i$  až do poloměru  $\sqrt{2}$ , budeme tedy rozvíjet na vnitřní straně (ne v nekonečno jak to uvidíme později). Jelikož je tato funkce holomorfní na celém okolí - nemá pól v bodu  $1 + i$  - bude její Laurentova řada mít pouze regulární část s mocninami  $(z - 1 - i)^n$ . Pro polynomy stupně 1 ve jmenovateli funguje trik s převedením na součet geometrické řady:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z - 1 - i + 1 + i} = \frac{1}{1 + i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - 1 - i}{1 + i}} = \frac{1}{1 + i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{z - 1 - i}{1 + i} \right)^n.$$

Vidíme, že tato řada opravdu konverguje pouze pokud

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - 1 - i}{1 + i} \right| &< 1 \\ |z - 1 - i| &< |1 + i| = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

Tedy jsme se s naším rozvojem v  $1 + i$  zasekli o singularitu v 0 funkce  $\frac{1}{z}$ .

Podobným způsobem rozvineme také funkci  $\frac{1}{z-i}$ . Zde ovšem musíme rozvíjet na vnější straně kruhového okolí s poloměrem 1, protože právě ve vzdálenosti 1 od bodu  $1 + i$  má tato funkce singularitu. Laurentova řada tak bude mít pouze hlavní část a to s mocninami  $\left(\frac{1}{z-1-i}\right)^n$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z-1-i+1} = \frac{1}{z-1-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-1-i}} = \frac{1}{z-1-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-1-i}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-1-i}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Nakonec nám zbývá rozvinout násobný kořen ve jmenovateli, to uděláme pomocí triku s derivací. Jelikož jsme na mezikruží, kde předchozí mocinná řada konverguje absolutně, můžeme ji derivovat člen po členu.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-i)^2} &= -\left(\frac{1}{z-i}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-1-i}\right)^{n+1}\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(z-1-i)^{n+1}}\right)' = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(z-1-i)^{n+2}} \end{aligned}$$

Nyní nezbývá než dát vše dohromady

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n + (3+i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(z-1-i)^{n+2}} - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-1-i}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Alternativně můžeme také zkusit sloučit druhou a třetí sumu, jelikož sčítáme stejné mocniny.

$$f(z) = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n - \frac{1}{z-1-i} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3+i)n+1}{(z-1-i)^{n+1}}$$

□