Domácí úkol 5

Termín odevzdání: čtvrtek 2. 4. 2026 do večera

1.)

Ověřte, že pro zobrazení

$$F(z) = z + \frac{1}{z}$$

platí Cauchy-Riemannovy podmínky mimo počátek, a je tudíž holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Existenci totálního diferenciálu ukazovat nemusíte). Poté najděte pod tímto zobrazením obraz kružnice K zadané

$$K = \left\{ z \in C, \left| z + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}i \right| = \frac{9}{10} \right\},$$

stačí najít parametrizaci křivky + náčrtek.

Nakonec si vyberte oblíbenou větev komplexního logaritmu a spočtěte

$$\ln\left(F\left(\frac{7}{10} + \frac{1}{3}i \right) \right),$$

bod leží $\frac{7}{10} + \frac{1}{3}i$ na K. Uvažujme, že kružnici K oběhneme a dostaneme se opět do stejného bodu. Znovu spočítejte hodnotu $\ln\left(F\left(\frac{7}{10} + \frac{1}{3}i \right) \right)$ za předpokladu, že $\arg F(z)$ během pohybu závisel spojitě na z.

Řešení: Ověření C-R podmínek není nic těžkého, musíme nejprve rozepsat funkční hodnotu jako $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, to se nám bude hodit mimo jiné i pro další počítání.

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right)}_{v(x,y)}$$

Ověřme nyní, že mimo počátek, platí vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} - x\frac{2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} &= 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} + y\frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\ 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} &= 1 + \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\ 1 + \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} &= 1 + \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \end{aligned}$$

a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \\
x\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} &= -\left(-y\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Nyní se podíváme na obraz kružnice K, vyjádříme parametricky reálnou a imaginární část zobrazených bodů. Kružnice K má střed v bodě $-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}i$ a poloměr $\frac{9}{10}$. V rovině $\mathbb{R}^2$ bychom ji zapsali rovnicí

$$
\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{9}{10}\right)^2.
$$

Z ní můžeme například vyjádřit výraz x^2+y^2 jako

$$
x^2+y^2=\frac{81}{100}-\frac{1}{25}-\frac{1}{9}-\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}y=\frac{593}{900}-\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}y.
$$

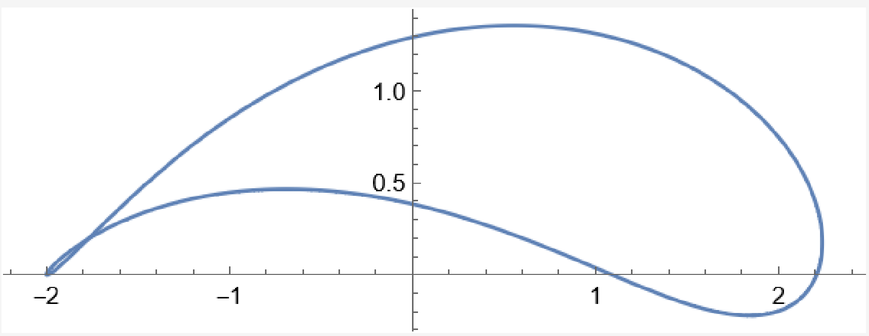
Je to jisté zjednodušení které můžeme dosadit do vzorečků pro u a v, ale tvar křivky se stále dedukuje špatně.

$$
u(x,y)=x\left(1+\frac{1}{\frac{593}{900}-\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}y}\right) \qquad v(x,y)=y\left(1-\frac{1}{\frac{593}{900}-\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}y}\right)
$$

Zkusme tedy alespoň křivku načrtnout, parametrizujme pomocí proměnné t jako

$$
x(t)=-\frac{1}{5}+\frac{9}{10}\cos(t), \qquad y(t)=\frac{1}{3}+\frac{9}{10}\sin(t),
$$

kombinací s předchozími vzorci jsme již schopni obraz kružnice parametricky popsat a vykreslit pomocí nějakého softwaru, např. *Wolfram Mathematica*.



Důležité je pro nás, že křivka zjevně neobkrouží počátek souřadnic.

Spočtěme komplexní logaritmus zadaného bodu $F\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{3}i\right)$. Moje oblíbená větev logaritmu je ta, která bere argument defaultně z intervalu $(-\pi,\pi]$. Počítejme nejprve obraz bodu

$$F\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{3}i\right)=\frac{7}{10}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{7}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right)+i\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{7}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right)=\frac{10\,087}{5410}-i\frac{359}{1623}.$$

Nyní jsme schopni spočítat logaritmus, nejprve si předpočítejme velikost a argument

$$\left|F\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{3}i\right)\right|=\frac{29}{30}\sqrt{\frac{2041}{541}}\qquad \arg\left(F\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{3}i\right)\right)=-\operatorname{arctg}\left(\frac{3590}{30\,261}\right),$$

proto platí

$$\ln\left(F\left(\frac{7}{10}+\frac{1}{3}i\right)\right)=\ln\left(\frac{29}{30}\sqrt{\frac{2041}{541}}\right)-i\operatorname{arctg}\left(\frac{3590}{30\,261}\right)\approx 0.62998...-i\,0.11808...$$

Vzhledem k tomu, že obraz křivky se neobtočí kolem počátku, jak je patrné z náčrtku, argument čísla po oběhnutí křivky dokola bude opět stejný a to samé platí hodnotu logaritmu.

PS. Omlouvám se za hnusná čísla, snažil jsem se zadat křivku, která se zobrazí na tvar připomínající profil křídla od letadla (stejně jsem tam udělal chybu :D). Jelikož jsme zobrazili kružnici na naši křivku zobrazením, které bylo holomorfní - tedy konformní - vně kružnice, je možné stejným zobrazením hezky mapovat také proudnice případného laminárního proudění kolem daných překážek. Více podrobností v bakalářské práci doktora Ondřeje Kincla zde.

□