Domácí úkol 4

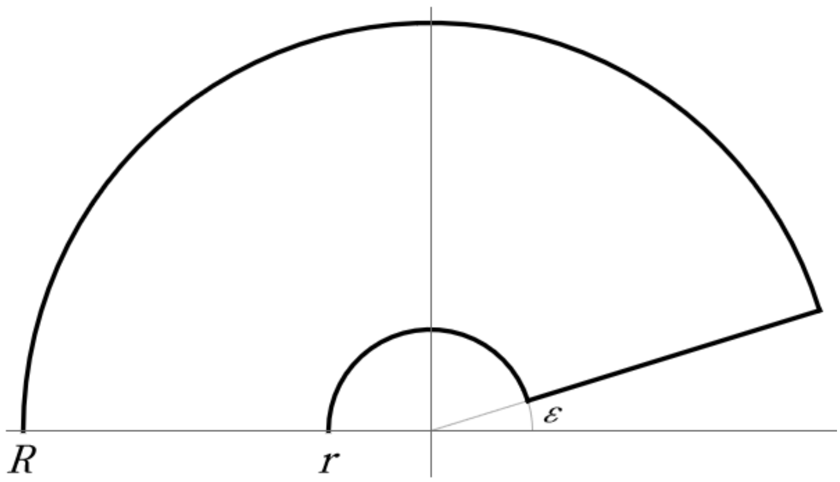
Termín odevzdání: 25. 3. 2026 do večera

1.)

Spočtěte (nejlépe pomocí vhodné parametrizace) integrál

$$\int_{\varphi} \frac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|+3}\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je křivka z obrázku – část kružnicového oblouku s poloměrem r, úsečka a druhý oblouk s poloměrem R.



Obrázek 1: Křivka φ

Řešení: K příkladu přistoupíme počítáním z definice. Jelikož nepočítáme integrál přes uzavřenou křivku a ani z holomorfní funkce, není jasná přímá aplikace Cauchyho nebo reziduové věty. Označme si tři části křivky po řadě

- φ_1 - kružnicový oblouk o poloměru r,
- φ_2 - úsečka ležící na radiále pod úhlem ε,
- φ_3 - kružnicový oblouk o poloměru R.

Každou část nyní parametrizujeme parametrem t.

- φ_1 - parametrizace $\gamma(t) = re^{it} \quad \gamma'(t) = ire^{it}, \quad t \in (\pi, \varepsilon)$,
- φ_2 - parametrizace $\gamma(t) = te^{i\varepsilon} \quad \gamma'(t) = e^{i\varepsilon}, \quad t \in (r, R)$,
- φ_3 - parametrizace $\gamma(t) = Re^{it} \quad \gamma'(t) = iRe^{it}, \quad t \in (\varepsilon, \pi)$.

Integrál nyní můžeme bez problému přepsat do tvaru

$$I = \int_{\varphi} \frac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|+3}\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} \frac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|+3}\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} \frac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|+3}\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} \frac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|+3}\,\mathrm{d}z =$$
$$= \underbrace{\int_{\pi}^{\varepsilon} \frac{re^{it}\,r\cos(t)}{r+3} ire^{it}\,\mathrm{d}t}_{I_1} + \underbrace{\int_{r}^{R} \frac{te^{i\varepsilon}\,t\cos(\varepsilon)}{t+3} e^{i\varepsilon}\,\mathrm{d}t}_{I_2} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{Re^{it}\,R\cos(t)}{R+3} iRe^{it}\,\mathrm{d}t.}_{I_3}$$

Jednotlivé integrály nyní rozdělíme na reálnou a imaginární část a spočteme postupně. Začněme s integrálem I_1:

$$I_1 = \int_{\pi}^{\varepsilon} \frac{re^{it}\,r\cos(t)}{r+3} ire^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{ir^3}{r+3}\int_{\pi}^{\varepsilon} \big(\cos(t)+i\sin(t)\big)^2 \cos(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{ir^3}{r+3}\int_{\pi}^{\varepsilon} \big(\cos^2(t)+2i\cos(t)\sin(t)-\sin^2(t)\big)\cos(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{r^3}{r+3}\int_{\pi}^{\varepsilon} 2\cos^2(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t + \frac{ir^3}{r+3}\int_{\pi}^{\varepsilon} \cos^3(t)-\sin^2(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{r^3}{r+3}\int_{\pi}^{\varepsilon} 2\cos^2(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t + \frac{ir^3}{r+3}\int_{\pi}^{\varepsilon} \cos(t)-2\sin^2(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Tyto integrály spočteme lehkou substitucí buďto za sin nebo cos.

$$I_1 = \frac{r^3}{r+3}\int_{-1}^{\cos(\varepsilon)} 2s^2\,\mathrm{d}s + \frac{ir^3}{r+3}\big[\sin(t)\big]_{\pi}^{\varepsilon} - \frac{ir^3}{r+3}\int_{0}^{\sin(\varepsilon)} 2s^2\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{2}{3}\frac{r^3}{r+3}\big[s^3\big]_{-1}^{\cos(\varepsilon)} + \frac{ir^3}{r+3}\left(\sin(\varepsilon)-\frac{2}{3}\big[s^3\big]_{0}^{\sin(\varepsilon)}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\frac{r^3}{r+3}\big(\cos^3(\varepsilon)+1\big) + i\frac{r^3}{r+3}\left(\sin(\varepsilon)-\frac{2}{3}\sin^3(\varepsilon)\right)$$

Můžeme využít jisté podobnosti mezi integrály I_1 a I_3 a dojít k závěru, že ve vzorečku pro I_3 bude jen R namísto r a znaménko mínus před výrazem (prohozené integrační meze)

$$I_3 = -\frac{2}{3}\frac{R^3}{R+3}\big(\cos^3(\varepsilon)+1\big) - i\frac{R^3}{R+3}\left(\sin(\varepsilon)-\frac{2}{3}\sin^3(\varepsilon)\right).$$

Poslední nám zbývá úsečka φ_2. Počítejme

$$I_2 = \int_{r}^{R} \frac{te^{it}t\cos(\varepsilon)}{t+3} e^{i\varepsilon}\,\mathrm{d}t = e^{2i\varepsilon}\cos(\varepsilon)\int_{r}^{R} \frac{t^2}{t+3}\,\mathrm{d}t = e^{2i\varepsilon}\cos(\varepsilon)\int_{r}^{R} t-3+\frac{9}{t+3}\,\mathrm{d}t =$$
$$= e^{2i\varepsilon}\cos(\varepsilon)\left[\frac{t^2}{2}-3t+9\ln(t+3)\right]_{r}^{R} = e^{2i\varepsilon}\cos(\varepsilon)\left(\frac{R^2-r^2}{2}-3(R-r)+9\ln\!\left(\frac{R+3}{r+3}\right)\right).$$

Dáme-li všechno dohromady, dostaneme

$$I = \left(\frac{r^3}{r+3}-\frac{R^3}{R+3}\right)\left(\frac{2}{3}\big(\cos^3(\varepsilon)+1\big)+i\left(\sin(\varepsilon)-\frac{2}{3}\sin^3(\varepsilon)\right)\right) +$$
$$+ e^{2i\varepsilon}\cos(\varepsilon)\left(\frac{R^2-r^2}{2}-3(R-r)+9\ln\!\left(\frac{R+3}{r+3}\right)\right).$$

□