Domácí úkol 3

Termín odevzdání: 25. 3. 2026 do večera

1.)

Najděte předpis holomorfní funkce $f(z)$ (v komplexní proměnné z), pokud $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ a

$$u(x,y) = e^x \left(x^2\cos(y) - 2xy\sin(y) - y^2\cos(y)\right).$$

Řešení: Aby funkce f byla holomorfní, musí její reálná a imaginární složka splňovat Cauchy-Riemannovy podmínky. Ty jsou ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Najdeme tedy funkci v tak, že nejprve zderivujeme u podle x a poté výsledek vyintegrujeme podle y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\left(x^2\cos(y) - 2xy\sin(y) - y^2\cos(y)\right) + 2xe^x\cos(y) - 2e^x y\sin(y).$$

Jdeme tedy integrovat

$$\int e^x\left(x^2\cos(y) - 2xy\sin(y) - y^2\cos(y)\right) + 2xe^x\cos(y) - 2e^x y\sin(y)\ \mathrm{d}y,$$

mezi členy jsou i integrály, které se špatně počítají zpaměti. Spočítejme je předem

$$\int y\sin(y)\ \mathrm{d}y = \left|\begin{array}{ll} u = y & \to u' = 1 \\ v' = \sin(y) & \to v = -\cos(y)\end{array}\right| = -y\cos(y) + \sin(y) + C(x)$$

$$\begin{aligned}\int y^2\cos(y)\ \mathrm{d}y &= \left|\begin{array}{ll} u = y^2 & \to u' = 2y \\ v' = \cos(y) & \to v = \sin(y)\end{array}\right| = y^2\sin(y) - 2\int y\sin(y)\ \mathrm{d}y = \\ &= y^2\sin(y) + 2y\cos(y) - 2\sin(y) + C(x).\end{aligned}$$

Můžeme teď přímo psát předpis pro $v(x,y)$:

$$\begin{aligned}v(x,y) &= e^x x^2\sin(y) + 2xe^x y\cos(y) - 2xe^x\sin(y) - e^x y^2\sin(y) - 2e^x y\cos(y) + \\ &\quad + 2e^x\sin(y) + 2xe^x\sin(y) + 2e^x y\cos(y) - 2e^x\sin(y) + C(x) = \\ &= e^x\left(x^2\sin(y) + 2xy\cos(y) - y^2\sin(y)\right) + C(x).\end{aligned}$$

Při integrování nám ve vzorci vyskočila konstanta, která ovšem může obecně záviset na x, jelikož se podle něj neintegrovalo. Abychom se s touto konstantou vypořádali rigorózně, použijeme druhou podmínku. Musí platit

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Porovnejme

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x x^2 \sin(y) - 2e^x x \sin(y) - 2e^x xy\cos(y) - 2e^x y\cos(y) + e^x y^2 \sin(y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x x^2 \sin(y) + 2e^x x \sin(y) + 2e^x xy\cos(y) + 2e^x y\cos(y) - e^x y^2 \sin(y) + C'(x),$$

vidíme, že výrazy podmínku splňují i bez pomoci konstanty $C(x)$, tu tedy nemusíme uvažovat.

Nyní musíme dostat funkci $u(x,y) + i\,v(x,y)$ do tvaru funkce od proměnné $x + iy$. Upravme si předpis u a v do tvarů

$$u(x,y) = e^x \big((x^2 - y^2)\cos(y) - 2xy\sin(y)\big)$$
$$v(x,y) = e^x \big((x^2 - y^2)\sin(y) + 2xy\cos(y)\big)\,.$$

Dále pak můžeme psát

$$\begin{aligned} u(x,y) + iv(x,y) &= e^x(x^2 - y^2)\big(\cos(y) + i\sin(y)\big) + 2e^x xy\big(-\sin(y) + i\cos(y)\big) = \\ &= e^x(x^2 - y^2)\big(\cos(y) + i\sin(y)\big) + 2ie^x xy\big(\cos(y) + i\sin(y)\big) = \\ &= e^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big)\big(x^2 + 2ixy - y^2\big) = \\ &= e^{x+iy}(x+iy)^2 = z^2 e^z. \end{aligned}$$

□