Domácí úkol 2

Termín odevzdání: 11. 3. 2026 do večera

1.)

Pomocí rozkladu do trigonometrických řad vyřešte následující parciální diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{na } (0,T)\times(0,l) \\ u(0,x) &= 0 && \text{na } (0,l) \\ u_t(0,x) &= x && \text{na } (0,l) \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) &= 0 && \text{na } (0,T). \end{aligned}$$

HINT: Postupujte podle podobně jako v příkladu 8.) z 2. sady.

Řešení: Budeme postupovat podobně jako příklad z cvičební sady podle hintu. Nejprve provedeme zásadní předpoklad: budeme hledat nejprve jednoduchá řešení ve tvaru součinu

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

Bez ohlížení na okrajové podmínky (zatím), musí naše řešení splňovat rovnici

$$\begin{aligned} T''(t)X(x) - c^2 T(t)X''(x) &= 0 \\ \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)}. \end{aligned}$$

Čárky u funkcí zde značí derivace vzhledem podle proměnné, na které funkce zrovna závisí. Vidíme, že na levé straně máme funkci od t a napravo zase od x. Pokud se mají rovnat pro všechny časy t a všechny body x, nesmí se hodnota ani jedné ze stran měnit. Musí být rovny nějaké konstantě, označme ji lambda. Řešme nejprve rovnici

$$X''(x) = \lambda X(x).$$

Tvar obecného řešení závisí na znaménku λ. Pokud by bylo $\lambda > 0$, řešení by bylo ve tvaru součtu exponenciál a okrajovou podmínku (4. rovnici v zadání – nulové jednostranné derivace) by splňovalo jen triviální řešení. To pro nás není zajímavé.

Dále uvažujme $\lambda = 0$, pak musí řešení $X(x)$ být lineární funkce. Okrajovka nás pak omezí na funkce čistě konstantní

$$X_0(x) = C. \qquad (\spadesuit 1)$$

Naposledy pro $\lambda < 0$ máme řešení se siny a kosiny ve tvaru

$$X(x) = A\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Okrajovou podmínka se teď promítne takto: nulová derivace v krajních bodech intervalu $(0, l)$

$$\begin{aligned} X'(x) &= A\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) - B\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \\ 0 = X'(0) &= A\sqrt{-\lambda} \quad \Rightarrow \quad A = 0 \\ 0 = X'(l) &= A\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}l\right) - B\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{-\lambda}l\right) = -B\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{-\lambda}l\right) \\ &\Rightarrow \sqrt{-\lambda}l = \pi n \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \end{aligned}$$

Možná řešení jsou tak pro různá n rovna

$$X_n(x) = B\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \tag{♣1}$$

Pro časovou složku je situace velmi podobná. Rovnice má v sobě jen konstantu navíc:

$$T''(t) = \lambda c^2 T(t)$$

Opět vyšetříme případy pro různé λ. Pro $\lambda > 0$ jsou řešením exponenciály, ovšem jelikož X bylo pro tyto lambdy nulové, potenciální u bude nulové taky a proto tento případ nemusíme dál řešit.

Pro $\lambda = 0$ máme opět lineární řešení. Okrajovou podmínku zatím uvažujme pouze tu $u_t(0, x) = 0$, neboli $T'(0) = 0$, tím dostaneme

$$T_0(t) = Ct. \tag{♠2}$$

V případě, že $\lambda = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} < 0$ máme

$$T_n(t) = E\sin\left(\frac{\pi n}{l}ct\right) \tag{♣2}$$

Nyní můžeme poskládat spoustu různých řešení $u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x)$ tak, že vždy spolu vynásobíme řešení (♠) (resp. (♣)), vždy korespondující stejné λ. Důležité pozorování je, že bez uvažování první počáteční podmínky, je problém čistě lineární. Tedy lineární kombinace možných řešení je také řešení. Obecné řešení tak zapíšeme jako (dokonce nekonečnou) lineární kombinaci všech námi nalezených možností

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}ct\right)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Koeficienty a_n pro $n \in \mathbb{N}_0$ určíme z počáteční podmínky $u_t(0, x) = x$. Derivace podle t se rovná

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\pi n c}{l}\cos\left(\frac{\pi n}{l}ct\right)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \\ x = u_t(0, x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\pi n c}{l}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \end{aligned}$$

Je vidět, že musíme najít rozvoj funkce x do kosinové řady na intervalu $(0, l)$. K tomuto účelu funkci x rozšíříme sudě na interval $(-l, l)$, tedy na funkci $|x|$. Počítejme integrály

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |x| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_0^l x \,\mathrm{d}x = l \\
\tilde{a}_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |x| \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} x\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = x & \to u' = 1 \\ v' = \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) & \to v = \frac{l}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \end{array} \right| = \frac{2}{l}\left[x\frac{l}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right]_0^l - \frac{2}{l}\frac{l}{\pi n}\int_0^l = \\
&= 0 - \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{l}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right]_0^l = \frac{2l}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right).
\end{aligned}$$

Vidíme, že a_n je nulové pro sudá čísla $n > 0$. Kosinovu řadu (pro $n = 2k + 1$) tak můžeme psát ve tvaru

$$x = \frac{l}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4l}{\pi^2(2k+1)^2}\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right).$$

A jelikož platí $\tilde{a}_0 = a_0$ a $\tilde{a}_n = a_n\frac{\pi n c}{l}$, můžeme finální řešení našeho problému zapsat jako

$$u(t,x) = \frac{l}{2}t - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4l^2}{\pi^3(2k+1)^3 c}\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{l}ct\right)\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{l}x\right).$$

□