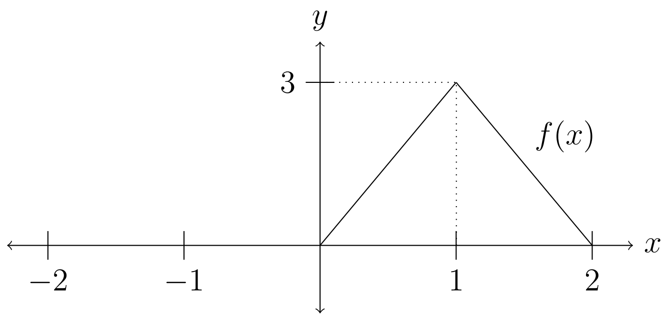
Domácí úkol 1

Termín odevzdání: 4. 3. 2026 do večera

1.)

Rozviňte následující funkci f do sinové řady na intervalu $[0, 2]$.



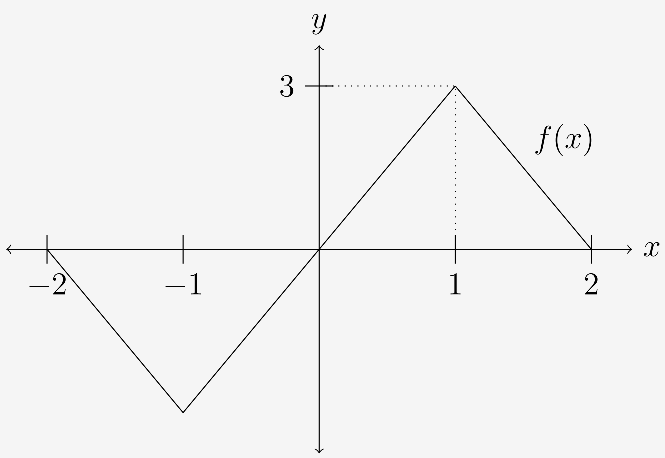
Poté pomocí tohoto rozvoje spočtěte řadu

$$1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(4n-1)^2} + \frac{1}{(4n+1)^2} \right]$$

HINT: Sinový rozvoj spočtete jako trigonometrický rozvoj liše prodloužené funkce f na intervalu $[-2, 2]$. Pro součet řady do rozvoje dosaďte bod $\frac{1}{2}$.

Řešení: Postupujme podle nápovědy. Budeme rozvíjet funkci f do sinové řady na intervalu $[-2, 2]$. Předpis této funkce vypadá následovně:

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 6 & \text{pro } x \in [-2, -1]\,, \\ 3x & \text{pro } x \in [-1, 1]\,, \\ -3x + 6 & \text{pro } x \in [1, 2]\,. \end{cases} \tag{1}$$



Pokud si představíme, že tuto funkci prodloužíme periodicky na celé $\mathbb{R}$, dostaneme funkci s periodou $L = 4$. Fourierovy koeficienty získáme výpočtem ze vzorečku

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\,\mathrm{d}x.$$

Situaci si můžeme trochu ulehčit pozorováním; funkce f je lichá stejně jako bázové funkce $\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)$. Jejich součin je tedy funkce sudá (důkaz je jednoduchý, z definice sudosti a lichosti). Můžeme si tedy dovolit počítat integrál pouze na intervalu $[0, 2]$ a výsledek vynásobit dvěma

$$b_n = \frac{4}{L}\int_{0}^{2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (-3x+6)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\,\mathrm{d}x.$$

Výpočet těchto dvou integrálů je elementární použití metody per partes, dostaneme

$$\int_0^1 3x\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = 3x & \to u' = 3 \\ v' = \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right) & \to v = -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right) \end{array}\right| = \left[-\frac{6}{\pi n}x\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\right]_0^1 +$$

$$+\frac{6}{\pi n}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{6}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{12}{\pi^2 n^2}\left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{6}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{12}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right),$$

a

$$\int_1^2 (-3x+6)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = -3x+6 & \to u' = -3 \\ v' = \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right) & \to v = -\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right) \end{array}\right| =$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi n}(-3x+6)\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\right]_1^2 - \frac{6}{\pi n}\int_1^2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) -$$

$$-\frac{12}{\pi^2 n^2}\left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\right]_1^2 = \frac{6}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{12}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Dohromady získáváme

$$b_n = \frac{24}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Koeficienty a_n i a_0 jsou jistě nulové díky lichému prodloužení naší funkce (počítali bychom integrál z liché funkce přes symetrický interval). Můžeme tedy psát

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right).$$

Jelikož je naše prodloužená periodická funkce f spojitá na celém $\mathbb{R}$, platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty,$$

a Fourierova řada konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$ (podle Weierstrassova kriteria). Bez problému tak můžeme dosazovat za x libovolné reálné číslo, řada bude konvergovat a mezi $f(x)$ a Fourierovou řadou bude platit rovnost.

Dosaďme tedy bod $x = \frac{1}{2}$. Víme, že $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ a na pravé straně dostaneme

$$\frac{3}{2} = \frac{24}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right).$$

Rozmysleme si nyní, jakých hodnot může nabývat součin $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$. První činitel je nenulový pouze pro lichá n, pro ně má absolutní hodnotu 1 a jen střídá znaménko. Druhý má pro lichá n vždy absolutní hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a znaménko střídá ob dva členy.

n	1	3	5	7	9	11	13	...
$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$	+	-	+	-	+	-	+	...
$\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$	+	+	-	-	+	+	-	...
součin	+	-	-	+	+	-	-	...

Znaménka přesně odpovídají řadě, kterou máme sečíst, tedy

$$\frac{3}{2} = \frac{24}{\pi^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \dots \right).$$

Výsledkem proto je

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(4n-1)^2} + \frac{1}{(4n+1)^2}\right] = \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{24}\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \approx 0.872358\dots$$

□