

Domácí úkol 10

Termín odevzdání: neděle 24. 5. 2026 do večera

1.)

Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, je-li

$$T = e^{-a|\mathbf{x}|^2} \Delta \delta_0,$$

pro $a > 0$.

Řešení: Zkoumejme, jak zadaná distribuce působí na jednotlivé testovačky. Položme 'duality-pairing' mezi T a φ a postupně přehodíme všechny operace na testovací funkci.

$$\left\langle e^{-a|\mathbf{x}|^2} \Delta \delta_0, \varphi \right\rangle = \left\langle \Delta \delta_0, e^{-a|\mathbf{x}|^2} \varphi \right\rangle = \left\langle \delta_0, \Delta \left(e^{-a|\mathbf{x}|^2} \varphi \right) \right\rangle,$$

kde jsme zužitkovali fakt, že $e^{-a|\mathbf{x}|^2}$ je hladká funkce a že Laplaceův operátor Δ je vlastně derivace druhého řádu (nevyskočí minus při přehození). Nyní spočtěme

$$\begin{aligned} \Delta \left(e^{-a|\mathbf{x}|^2} \varphi \right) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(e^{-a|\mathbf{x}|^2} \varphi \right) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-2ax_i e^{-a|\mathbf{x}|^2} \varphi + e^{-a|\mathbf{x}|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^d \left(-2ae^{-a|\mathbf{x}|^2} \varphi + 4a^2 x_i^2 e^{-a|\mathbf{x}|^2} \varphi - 4ax_i e^{-a|\mathbf{x}|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + e^{-a|\mathbf{x}|^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right) = \\ &= e^{-a|\mathbf{x}|^2} \left(-2ad\varphi + 4a^2 |\mathbf{x}| \varphi - 4a\mathbf{x} \cdot \nabla \varphi + \Delta \varphi \right). \end{aligned}$$

Proto po aplikaci Diraca všechny členy násobené x zmizí

$$\begin{aligned} \left\langle \delta_0, \Delta \left(e^{-a|\mathbf{x}|^2} \varphi \right) \right\rangle &= -2ad\varphi(0) + \Delta \varphi(0) = \langle \delta_0, -2ad\varphi \rangle + \langle \delta_0, \Delta \varphi \rangle = \\ &= \langle -2ad\delta_0 + \Delta \delta_0, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

a tedy

$$T = -2ad\delta_0 + \Delta \delta_0$$

□

2.)

Pro parametr $b \in \mathbb{C}$ spočtěte Fourierovu transformaci

$$\mathcal{F}(T_{\cos(2\pi bx)}).$$

Řešení: Vyjděme z definice Fourierovy transformace na distribucích:

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

neboli opět přehazujeme vše na testovačku

$$\langle \mathcal{F}(T_{\cos(2\pi bx)}), \varphi \rangle = \langle T_{\cos(2\pi bx)}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle.$$

Nyní máme v dualitě již regulární distribuci (určenou funkcí), tedy víme, jak působení vhodně přepsat do integrálu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi bx) \mathcal{F}(\varphi) \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi bx) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-2\pi i xy} \, dy \, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi bxi} + e^{-2\pi bxi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-2\pi i xy} \, dy \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-2\pi i x(y-b)} + \varphi(y) e^{-2\pi i x(y+b)} \, dy \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\bar{y} + b) e^{-2\pi i x \bar{y}} \, d\bar{y} + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\bar{y} - b) e^{-2\pi i x \bar{y}} \, d\bar{y} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi(\bar{y} + b)) + \mathcal{F}(\varphi(\bar{y} - b)) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \langle T_1, \mathcal{F}(\varphi(\bar{y} + b) + \varphi(\bar{y} - b)) \rangle = \frac{1}{2} \langle \delta_0, \varphi(\bar{y} + b) + \varphi(\bar{y} - b) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (\varphi(b) + \varphi(-b)) = \left\langle \frac{1}{2} \delta_b + \frac{1}{2} \delta_{-b}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Proto platí

$$\mathcal{F}(T_{\cos(2\pi bx)}) = \frac{1}{2} \delta_b + \frac{1}{2} \delta_{-b}$$

□