Sada příkladů 5/9

Henri Lebesgue a jeho integrál

Lebesgueova a Léviho věta

Spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$
2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$
3. $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$
4. $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx}x^2\,\mathrm{d}x$

   Rozvinutím vhodné funkce do řady spočtěte následující integrály. Ověřte předpoklady vět, které používáte!

5. $\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x \qquad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$
6. $\int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$
7. $\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x \qquad \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}\right)$

Integrály závislé na parametru

8. Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině:

   a) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a}\,\mathrm{d}x$, $a<2$

b) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \cos ax \,\mathrm{d}x$, $-\infty < a < \infty$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} \,\mathrm{d}x$, $1 < a < \infty$

Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje, a spočtěte jej:

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} \,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x} \,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2} \,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \,\mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} \,\mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx \,\mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \cosh bx \,\mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a\sin^2 x)}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int_0^\pi \ln(a \pm b\cos x) \,\mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax} \cos bx \,\mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \,\mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\frac{\sinh x}{x}\,\mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int_0^1 x^{-\alpha}\ln^n x\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}_0$

22. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(a^2+b^2\mathrm{tg}^2x)\,\mathrm{d}x$

23. $\displaystyle\int_{x>0,y>0} \mathrm{e}^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})}x^{-1/3}y^{-2/3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Doplněním vhodného parametru spočtěte:

24. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\mathrm{tg}x}\,\mathrm{d}x$

25. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

26. Vyšetřete průběh funkce na jejím definičním oboru:

$$F(a)=\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$m = \int_\Omega \rho \, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gz} r \, dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{2\pi R^2}{2}\cdot\int_0^h \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gz}dz = \rho_0\pi R^2\int_0^h \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0}gz\right)dz = \underline{\underline{\frac{p_0\pi R^2}{g}\left(1-e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh}\right)}}$$

<u>Leviho věta</u> : $\{f_n\}_1^\infty \subset L$, $f_n \nearrow f$

Potom $\int \lim f_n = \lim \int f_n$ (může být nekonečný)

<u>Varianta pro řady</u> : $\{f_n\}_1^\infty \subset L$, $f_n \geq 0$

Potom $\int \sum_1^\infty f_n = \sum_1^\infty \int f_n$

<u>Lebesgueova věta</u> : $\{f_n\}_1^\infty \subset L$, $f_n \to f$ s.v. a $\exists g \in L \ \forall n \in N: |f_n| \leq g$

Potom $f \in L$ a $\int \lim f_n = \lim \int f_n$

Tedy: Levi : monotonie + odhad

Lebesgue : bez monotonie, ale s majorantou

---

① $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}dx$ $\quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ $\quad$ na $x\in(0,1)$ je $\left.\begin{matrix} x^n < 1 \\ \frac{1}{n} < 1\end{matrix}\right\} \frac{x^n}{n} < 1$

$|f_n(x)| \leq 1$, $\int_0^1 1\,dx = 1$ ... 1 je majoranta, použiju Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}dx = \int_0^1 0\,dx = \underline{\underline{0}}$$

---

② $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,dx$ $\quad$ e^{-x} vše převálcuje $\Rightarrow$ hledám majorantu

Velmi hrubě : $\frac{\ln(x+n)}{n} \leq \frac{x+n}{n} \leq x+1$ pro velká n

$|f_n(x)| \leq e^{-x}\cdot(x+1)$ ... to je očividně integrovatelná majoranta

$\Rightarrow \lim\int = \int\lim = \int 0\,dx = 0$ $\quad$ protože $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n} = 0$ ze škálovací limity

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx$

$x\in(0,1)$: $x^n \to 0$, takže $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \le x^n \le 1$, 1 je integrovatelná majoranta

$x\in(1,\infty)$: $x^n\to\infty$: $\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^{-n}+x^n} \le \frac{1}{x^n} \le \frac{1}{x^2}$ pro $n\ge 2$, $\frac{1}{x^2}$ je int. majoranta

$\Rightarrow$ Lebesgue: $\lim\int = \int\lim = \int f(x)\,dx$ kde $f(x) = 0$ na $(0,1)$
$= \frac{1}{2}$ v $x=1$
$= 0$ na $(1,\infty)$

Tedy $f(x)=0$ s.v. a $\int f(x)dx = \underline{\underline{0}}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx}x^2\,dx$ $\qquad$ e^{-nx} je klesající v n $\Rightarrow$ $e^{-nx} \le e^{-x}$ pro $x>0$

$e^{-x}\cdot x^2$ je integrovatelná (kdo nevěří, udělá per partes)

$\Rightarrow$ Lebesgue: $\lim\int = \int\lim = \int 0\,dx = \underline{\underline{0}}$.

5) $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{x}{e^x}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{e^x}\sum_{n=0}^\infty e^{-nx}\,dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \underbrace{x e^{-nx}}_{f_n\ge 0}\,dx$

[Vím, že původní integrál je konečný, protože u $x=0$ má $\frac{x}{e^x-1}$ konečnou limitu a u ∞ klesá exponenciálně $\Rightarrow$ jako (N)$\int$ konverguje.]

$\Rightarrow$ Levi pro řady: $= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x e^{-nx}\,dx = \left| \begin{matrix} u=x & u'=1 \\ v'=e^{-nx} & v=-\frac{1}{n}e^{-nx} \end{matrix} \right|$

$= \sum_1^\infty \underbrace{\left[-\frac{1}{n}xe^{-nx}\right]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{1}{n}e^{-nx}\,dx = \sum_1^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{n}\,dx = \sum_1^\infty \left[-\frac{e^{-nx}}{n^2}\right]_0^\infty = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{6}}}$

6) $\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{-\ln x\,dx}{1-x^2} = -\int_0^1 \ln x \sum_0^\infty x^{2n}\,dx = -\int_0^1 \sum_0^\infty \ln x\, x^{2n}\,dx$

$-\ln x \ge 0$, $x^{2n}\ge 0$ $\Rightarrow$ Levi: $= -\sum_0^\infty \int_0^1 \ln x\, x^{2n}\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x & v'=x^{2n} \\ u'=\frac{1}{x} & v=\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{matrix} \right|$

$= -\sum_0^\infty \underbrace{\left[\ln x\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}\,dx = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$

$\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$

(7) (8)

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x}\sum_0^\infty e^{-nx}\,dx = \int_0^\infty \sum_1^\infty x^3 e^{-nx}\,dx$$

$x^3 e^{-nx} \geq 0 \Rightarrow$ Lévi: $= \sum_1^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-nx}\,dx$ 3x per partes

$$= \sum \int \frac{3x^2 e^{-nx}}{n}\,dx = \sum \int \frac{6x e^{-nx}}{n^2}\,dx = \sum \int \frac{6 e^{-nx}}{n^3}\,dx = \sum_1^\infty \frac{6}{n^4} = \underline{\underline{\frac{\pi^4}{15}}}$$

Integrály závislé na parametru

Věta (o spojitosti): Nechť $A \subset \mathbb{R}$ a $\alpha_0 \in A$ je vnitřní bod A. Nechť $f: X \times A \to \mathbb{R}$ splňuje

(i) $\forall \alpha \in A: x \mapsto f(x,\alpha)$ je měřitelná

(ii) pro s.v. $x \in X$: $\alpha \mapsto f(x,\alpha)$ je spojitá v α_0

(iii) $\exists g \in L^1 : |f(x,\alpha)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ a $\forall \alpha \in A$.

Pak $x \mapsto f(x,\alpha) \in L^1$ $\forall \alpha \in A$ a funkce $\alpha \mapsto \int_X f(x,\alpha)\,dx$ je spojitá v α_0.

Věta (o limitě): Nechť $A \subset \mathbb{R}$ a $\alpha_0 \in A$ je vnitřní bod A. Nechť $f: X \times (A \setminus \{\alpha_0\}) \to \mathbb{R}$ splňuje

(i) $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\} : x \mapsto f(x,\alpha)$ je měřitelná

(ii) pro s.v. $x \in X$: existují vlastní limity $F(x) = \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x,\alpha)$

(iii) $\exists g \in L^1 : |f(x,\alpha)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ a $\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$.

Pak $x \mapsto f(x,\alpha) \in L^1$ $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$, $F \in L^1$ a platí $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_X f(x,\alpha)\,dx = \int_X F(x)\,dx$

Věta (o derivaci): Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť $f: X \times A \to \mathbb{R}$ splňuje

(i) $\forall \alpha \in A: x \mapsto f(x,\alpha)$ je měřitelná

(ii) pro s.v. $x \in X$ a $\forall \alpha \in A$ $\exists$ (vlastní) $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$

(iii) $\exists g \in L^1 : \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$ a $\forall \alpha \in A$

(iv) $\exists \alpha_0 \in A : x \mapsto f(x,\alpha_0) \in L^1$.

Pak $x \mapsto f(x,\alpha) \in L^1$ $\forall \alpha \in A$, funkce $\varphi: \alpha \mapsto \int_X f(x,\alpha)\,dx$ má na A vlastní derivaci a

$$\varphi'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx.$$

Obvykle v příkladech: měřitelnost plyne ze spojitosti.

8a) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a}\,dx$ $\quad a < 2$

Pozorování: $a \leq 0$: $f(x,a)$ je omezená a spojitá, majoranta např. $g(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2A}$ na intervalu $a \in (-A, 0]$. Pro $a \to -\infty$ je $f(\frac{\pi}{2},a) \to +\infty$ (i na okolí tohoto bodu). Ale dostáváme spojitost na každém intervalu typu $(-A,0]$.

Pro $a > 0$ máme problémy v krajních bodech. Majorantu tak hledáme zvlášť na $I_1 = (0,\delta)$ $\quad I_2 = (\delta, \pi-\delta)$ $\quad I_3 = (\pi-\delta, \pi)$

Na I_2 lehce $|f(x,a)| \le K$,

Např. $\left|\frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a}\right| \le \frac{1}{\delta^a(\pi-\delta)^a} \le \frac{1}{\delta^{2a}} \le \frac{1}{\delta^4}$

protože $a<2$.

Na I_1 : $|f(x,a)| \le \left|\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\le 1} \cdot \frac{1}{x^{a-1}} \cdot \frac{1}{(\pi-x)^a}\right| \le \frac{1}{x^{a-1}} \cdot \frac{1}{(\pi-\delta)^a} \le \frac{1}{x^{a_0-1}}$,

kde jsme omezili $a \in (0,a_0]$, a_0 je lib. číslo tak, že $a_0<2$, tj. $a_0-1<1$

a proto $\left(\frac{1}{x}\right)^{a_0-1}$ je integrovatelná majoranta

Podobně I_3: $|f(x,a)| \le \left|\frac{\overbrace{\sin(\pi-x)}^{=\sin x}}{\pi-x} \cdot \frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{(\pi-x)^{a-1}}\right| \le \frac{1}{(\pi-x)^{a_0-1}}$, což je opět integrovatelné

$g := \max\left\{\frac{1}{x^{a_0-1}}, \frac{1}{\delta^4}, \frac{1}{(\pi-x)^{a_0-1}}\right\}$ je majoranta na celém $(0,\pi)$

$\Rightarrow F(a) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a}$ je spojitá na $[-A,a_0]$ pro lib. $A>0$, $a_0<2$, tj.

je spojitá na $(-\infty,2)$

8b) $\int_0^2 x^2\cos(ax)\,dx$ $\qquad a \in \mathbb{R}$

- měřitelnost a spojitost triviální (stejně tak v 8a))
- Majoranta: $|\cos ax| \le 1 \Rightarrow |x^2\cos ax| \le x^2 \in L^1((0,2)) \Rightarrow$ spojitost pro $a \in \mathbb{R}$.

8c) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a}\,dx$, $1<a<\infty$

- měřitelnost v x, spojitost v a triviální
- majoranta: pro $a \ge a_0$ $a_0 \in (1,\infty)$ t.ž.

$\left|\frac{\cos x}{x^a}\right| \le \frac{1}{x^{a_0}}$, což je integrovatelné na $(1,\infty)$ $\Rightarrow F(a) = \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} \in C([a_0,\infty))$

$\forall a_0>1 \Rightarrow F(a) \in C((1,\infty))$

---

9) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx =: I(a)$. Myšlenka: derivace arctg dá racionální fci, tu umíme zintegrovat.

$I'(a) =$ (po ověření předpokladů, viz níže) $= \int_0^\infty \frac{\frac{\partial}{\partial a}(\operatorname{arctg} ax)}{x(1+x^2)}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+(ax)^2)}\,dx$

$a=1$: $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^\infty}_{=0} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$

$a \neq 1$: Rozklad na PZ : $\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+a^2x^2} = \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{a^2}{1+a^2x^2} \right) \cdot \frac{1}{1-a^2}$

(problém i pro $a = -1$, tak řekněme necht' $a > 0$)

$$\Rightarrow I'(a) = \frac{1}{1-a^2} \cdot \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} - a \int_0^\infty \frac{a}{1+a^2x^2} dx \right) = \frac{1}{1-a^2} \left(\frac{\pi}{2} - a \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$$

Všimneme si, že $I'(1) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$ pro $a = 1$ také, tedy $I'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a}$ platí pro $a > 0$.

$$I(a) = \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ triv.}}}{I(0)} + \int_0^a I'(\tilde{a}) d\tilde{a} \text{ , tj. } I(a) = \int_0^a \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\tilde{a}} d\tilde{a} = \underline{\frac{\pi}{2} \cdot \ln(1+a) \text{ , } a \geq 0}$$

Pro $a < 0$ si všimneme $I(a) = -I(-a)$ z lichosti fce $\operatorname{arctg}(ax)$, proto pro $a < 0$ je $\underline{I(a) = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln(1-a) \text{ , } a < 0}$

Předpoklady věty :
- měřitelnost a existence derivace triv.
- $\exists a_0$ t.ž. $x \longmapsto f(x, a_0) \in L^1$ ano, např. $a_0 = 0$, $f(x, 0) = 0 \in L^1$
- majoranta : $\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| = \frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1((0, \infty))$ ✓

Alternativní postup : Protože $f(x,0) = 0$, platí $f(x,a) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} \right) d\alpha$

a proto $I(a) = \int_0^\infty \int_0^a \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)} d\alpha \, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^a \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)} dx = \int_0^a \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$

$(a > 0)$

---

(10) $I(a,b) := \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$

Přes Fubiniho : $e^{-ax^2} - e^{-bx^2} = \left[e^{-cx^2} \right]_{c=b}^{c=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial c} \left(e^{-cx^2} \right) dc = \int_b^a -x^2 e^{-cx^2} dc$

$$\Rightarrow I(a,b) = \int_0^\infty \int_b^a -x e^{-cx^2} dc \, dx = \int_0^\infty \int_a^b x e^{-cx^2} dc \, dx = \int_a^b \int_0^\infty x e^{-cx^2} dx \, dc \overset{\substack{y = cx^2 \\ dy = 2cx\,dx}}{=}$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2c} \int_0^\infty e^{-y} dy \, dc = \int_a^b \frac{1}{2c} dc = \frac{1}{2} \left(\ln|b| - \ln|a| \right) = \ln \sqrt{\left| \frac{b}{a} \right|}$$

! POZOR !

Přepočet mezí při substituci $y = cx^2$ platí jen pro $c > 0$!! Pro $c < 0$ bychom dostali $\int_0^{-\infty} e^{-y} dy$, to není konečný integrál. $c = 0$ je také problém : $\int_0^\infty x \cdot e^0 dx = \infty$!!

Vše projde pouze pokud je $c > 0$, tj. $a > 0$, $b > 0$. $\underline{\text{Pak } I(a,b) = \ln \sqrt{\frac{b}{a}}}$.

To vidíme ostatně už na začátku : $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{x} dx$ konverguje v ∞ jen pro $a > 0$

Konvergence v nule : $e^{-ax^2} \sim 1$, což je zdánlivě problém, ale $e^{-ax^2} - e^{-bx^2} \sim x^2$, což už je OK.

Pomocí věty o derivaci:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = (\text{po ověření předpokladů}) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\right) dx = \int_0^\infty -x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a}$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = (\text{-}\,\text{''}\,\text{-}) = \int_0^\infty x e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2b}$$

$$\Rightarrow I = \int -\frac{1}{2a}\, da + f(b) = -\frac{1}{2}\ln a + f(b)$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = f'(b) = \frac{1}{2b} \Rightarrow f(b) = \frac{1}{2}\ln b + C$$

$$\Bigg\}\quad I = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a} + C = \ln\sqrt{\frac{b}{a}} + C$$

ale očividně $I(a,a) = 0 = \ln\sqrt{\frac{a}{a}} + C \Rightarrow C = 0. \Rightarrow \underline{I(a,b) = \ln\sqrt{\frac{b}{a}}}$

Předpoklady:
- měřitelnost a ex. derivace triv. $\left(\frac{\partial f}{\partial a} \text{ a } \frac{\partial f}{\partial b}\right)$
- $\exists a_0, b_0$ t.ž. $x \mapsto f(x, a_0, b_0) \in L^1$: $a_0 = b_0 = 1$ např.
- majoranta: $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \le x \cdot e^{-a_0 x^2}$ pro $a \ge a_0$, $a_0 > 0$ lib.

  a podobně $\left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \le x \cdot e^{-b_0 x^2}$ pro $b \ge b_0$, $b_0 > 0$ lib.

$\Rightarrow$ Větu lze používat na $(a_0,\infty) \times (b_0,\infty)$ pro lib. $a_0, b_0 > 0$, tj. na $(0,\infty) \times (0,\infty)$

---

11) DÚ

---

12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}$

Poblíž $x = 0$ potřebujeme $a, b > -1$ ke konvergenci integrálu.

Poblíž $x = 1$ $a = b$ je OK, $a \ne b$: (BÚNO $b > a$): $\dfrac{x^a \cdot (x^{b-a} - 1)}{\ln x}$, $\ln x \sim x - 1$

$\dfrac{x^{b-a} - 1}{x - 1}$ je integrovatelné v $x = 1$

!! Používám $c > -1$

Tedy pro $a, b > -1$: $$I(a,b) = \int_0^1 \int_a^b \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{x^c}{\ln x}\right) dc\, dx = \int_0^1 \int_a^b x^c\, dc\, dx \overset{\text{FUB}}{=} \int_a^b \int_0^1 x^c\, dx\, dc =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{c+1}\, dc = \underline{\ln\frac{b+1}{a+1}}$$

Lze i větou o derivaci jako v 9 a 10. Předpoklady:
- měřitelnost a ex. derivací $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$ triv
- ~~$f(x,1,1)$~~
- $f(x,1,1) = 0 \in L^1(0,1)$ OK
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = x^a \le x^{a_0}$ pro $a \ge a_0 > -1$

  je integrovatelná
- $\left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| = x^b \le x^{b_0}$ pro $b \ge b_0 > -1$

$\Rightarrow$ Větu lze použít na $(a_0,\infty) \times (b_0,\infty)$, tj. na $(-1,\infty) \times (-1,\infty)$

(13)

$$I(a,b) := \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \cdot \operatorname{arctg} bx}{x^2}\,dx$$

Konvergence integrálu: v ∞: $f(a,b,x) \sim \frac{1}{x^2}$ OK

v 0: $\frac{\operatorname{arctg} ax}{x} \sim 1$, $\frac{\operatorname{arctg} bx}{x} \sim 1$ OK $\quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

Symetrie: $I(a,b) = -I(a,-b) = -I(-a,b) = I(-a,-b)$, $I(a,0) = I(0,b) = 0$ $\Big\}$ dále jen pro $a,b>0$.

$$\frac{\partial I}{\partial a} = (\text{předpoklady}) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)}\,dx \quad \dots \text{ vidíme, že } \frac{\partial I}{\partial a}(a,0)=0.$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a\,\partial b} = (\;-\,{}''\,-\;) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\,dx = (\text{podobně jako v příkladu } (9)) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a+b}$$

platí pro $a \neq b$ i pro $a=b$ – je potřeba ale počítat zvlášť!

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b) = \int_0^b \frac{\partial^2 I}{\partial a\,\partial \beta}(a,\beta)\,d\beta + \underbrace{\frac{\partial I}{\partial a}(a,0)}_{=0} = \int_0^b \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a+\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$$I(a,b) = \underbrace{I(0,b)}_{=0} + \int_0^a \frac{\partial I}{\partial a}(\alpha,b)\,d\alpha = \int_0^a \frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{b}{\alpha}\right)d\alpha = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^a \ln(\alpha+b) - \ln\alpha \,d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\Big[(\alpha+b)\big(\ln(\alpha+b)-1\big)\Big]_0^a - \Big[\alpha(\ln\alpha-1)\Big]_0^a\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\Big((a+b)\ln(a+b) - (a+b) - b\ln b + b - a\ln a + a\Big) = \frac{\pi}{2}\cdot\Big((a+b)\ln(a+b) - a\ln a - b\ln b\Big)$$

To je pro $a,b>0$. Do zbylých kvadrantů prodloužíme symetriemi a na osách dodefinujeme nulou.

Předpoklady:
- měřitelnost a existence derivací OK
- $f(0,0,x) = 0 \in L^1((0,\infty))$, $\frac{\partial f}{\partial a}(a,0,x) = 0 \in L^1$
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \left|\frac{1}{1+a^2x^2}\right|\cdot\underbrace{\left|\frac{\operatorname{arctg} bx}{x}\right|}_{\leq b} \leq |b|\,\frac{1}{1+a^2x^2} \leq \frac{B}{1+\varepsilon^2x^2}$ pro $b\in(-B,B)$, $a\in(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\infty)$
- $\left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| = \text{podobně} \leq \frac{A}{1+\varepsilon^2x^2}$ pro $a\in(-A,A)$, $b\in(-\infty,-\varepsilon),(\varepsilon,\infty)$
- $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\right| = \left|\frac{1}{1+a^2x^2}\right|\left|\frac{1}{1+b^2x^2}\right| \leq \frac{1}{(1+\varepsilon^2x^2)^2}$ pro $(a,b)\in(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\infty)$

Větu lze používat na $\big((-A,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,A)\big)\times\big((-B,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,B)\big)$ pro lib. A,ε,B, tj.

na $\big((-\infty,0)\cup(0,\infty)\big)\times\big((-\infty,0)\cup(0,\infty)\big)$

14 $I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx$ Pro konvergenci potřebujeme $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = (!) = \int_0^\infty -x e^{-ax^2} \sin bx \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x e^{-ax^2} & v = \sin bx \\ u = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} & v' = \cos bx \cdot b \end{array} \right| = -\underbrace{\left[-\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \right]_0^\infty}_{=0} - \frac{b}{2a} I(a,b)$$

Tj. $\frac{\partial I}{\partial b} = -\frac{b}{2a} I$ ... Dif. rovnice!

$$\ln|I| = -\frac{b^2}{4a} + C(a)$$

$$\Rightarrow I = \tilde{C}(a) \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$I(a,0) = \tilde{C}(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{a} x \\ dy = \sqrt{a} dx \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Rightarrow \underline{I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv.

• $f(1,0,x) = e^{-x^2} \in L^1$ (obecně $f(a,0,x) = e^{-ax^2} \in L^1 \ \forall a > 0$)

• majoranta: $\left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| = x e^{-ax^2} |\sin bx| \leq x e^{-ax^2} \leq x e^{-a_0 x^2}$ pro $a \geq a_0 > 0$.
$\in L^1((0,\infty))$

$\Rightarrow$ Větu lze použít na $[a_0,\infty) \times \mathbb{R}$ $\forall a_0$, tedy na $(0,\infty) \times \mathbb{R}$.

---

15 $I(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cosh bx \, dx$ Připomenutí: $\cosh bx = \frac{1}{2}(e^{bx} + e^{-bx})$

Člen ax^2 je silnější než $\pm bx \Rightarrow$ pro konvergenci $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Analogicky jako 14: $\frac{\partial I}{\partial b} = (!) = \frac{b}{2a} I$

$$\ln I = \frac{b^2}{4a} + C(a)$$

$$I = \tilde{C}(a) e^{b^2/4a}$$

$$I(a,0) = \tilde{C}(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Rightarrow \underline{I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv.

• $f(a,0,x) = e^{-ax^2} \in L^1 \ \forall a > 0$

• majoranta: $\left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| = x e^{-ax^2} |\sinh bx| \leq x e^{-ax^2 + |b| x} \leq \underbrace{x e^{-a_0 x^2 + Bx}}_{\in L^1((0,\infty))}$

pro $a \geq a_0 > 0$ a $b \in [-B, B]$

$\Rightarrow$ Větu lze použít na $[a_0, \infty) \times [-B, B]$ $\forall a_0 > 0, \forall B > 0 \Rightarrow$ na $(0,\infty) \times \mathbb{R}$.

---

16 $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} dx$ Konvergence v nuly: OK, $\ln(1 + a \sin^2 x) \sim a \sin^2 x$

v $\pi/2$: žádný problém.

Ale pro dobře definovanou fci potřebujeme $1 + a \sin^2 x > 0$ na $(0, \pi/2)$, tj. $1 + a > 0 \Rightarrow \underline{a > -1}$!

7

$$I'(a) = (!) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\sin^2 x}\,\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+a\sin^2 x}\,dx = \left| \begin{matrix} t=\operatorname{tg}x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ t^2+1=\frac{1}{\cos^2 x} \\ \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}\end{matrix}$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{at^2}{t^2+1}}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(a+1)t^2}\,dt = \left| \begin{matrix} s=\sqrt{a+1}\,t \\ ds=\sqrt{a+1}\,dt\end{matrix}\right|$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a+1}}\cdot\frac{1}{1+s^2}\,ds = \frac{1}{\sqrt{a+1}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$I(0)=0$ očividně $\Rightarrow$ $I(a) = \int_0^a I'(\alpha)\,d\alpha = \int_0^a \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot\left[\sqrt{\alpha+1}\right]_0^a$

$$I(a) = \pi\left(\sqrt{a+1}-1\right)$$

Platí i pro $a=-1$. Konvergence integrálu $\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}dx$ v $\pi/2$ lehce. Dále argument Léviho větou: $I(-1)=\lim_{a\to-1_+} I(a) = -\pi$. Monotonie: $f(a,x)$ je klesající v proměnné a, ale záporná; Lévi lze použít na $-f(a,x)$, to je rostoucí a kladná, takže OK.

Předpoklady:
- měřitelnost a ex. derivace triv
- $f(0,x)=0\in L^1(0,\pi/2)$
- majoranta $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \frac{1}{1+a\sin^2 x} \le \begin{cases} 1 & \text{pro } a\ge 0 \quad ✓ \\ \frac{1}{1+a_0} & \text{pro } a\in[a_0,0] \quad a_0>-1\end{cases}$

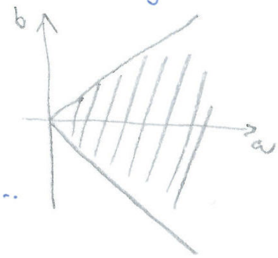
$\Rightarrow$ Větu lze použít na $[a_0,\infty)$ pro $\forall a_0>-1$, tj. na $(-1,\infty)$.

---

17 $I(a,b)=\int_0^\pi \ln(a+b\cos x)\,dx$ Potřebujeme $a+b\cos x>0$ na $(0,\pi)$, tj. $a+b>0$ a $a-b>0$.

(Pozorování: $\int_0^\pi \ln(a-b\cos x)\,dx = I(a,-b)$)

Tedy např. $a>0$, $b\in(-a,a)$.



$$\frac{\partial I}{\partial a} = (!) = \int_0^\pi \frac{1}{a+b\cos x}\,dx \;\left| t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \dots = \frac{2}{a+b}\int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}t^2}\,dt = \left| v = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,t\right| = \dots$$

$$\dots = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\operatorname{arctg} v\right]_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$\Rightarrow I(a,b) = \underbrace{\int \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\,da} + f(b)$ BÚNO $b>0$, očividně je hodnota integrálu nezávislá na znaménku b

$$= \pi\int \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\cdot|b|}\,da \overset{\downarrow}{=} \left|\begin{matrix} t=\frac{a}{b} \\ dt=\frac{1}{b}da\end{matrix}\right| = \pi\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \pi\cdot\operatorname{argcosh} t$$

$$\Rightarrow I(a,b) = \pi\cdot\operatorname{argcosh}\frac{a}{b} + f(b) = \pi\cdot\ln\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)+f(b)$$

$a=b$: $\operatorname{argcosh}\frac{a}{a} = \operatorname{argcosh} 1 = 0 \Rightarrow f(b)=I(b,b)=\int_0^\pi\ln(b+b\cos x)\,dx = \pi\cdot\ln b+\int_0^\pi\ln(1+\cos x)\,dx$

TRIKEM: 1) $\int_0^\pi \ln(1+\cos x)\,dx = \int_0^\pi\ln\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^\pi\left(\ln 2+2\ln\cos\frac{x}{2}\right)dx = \pi\ln 2+4\int_0^{\pi/2}\ln\cos t\,dt$

2) $\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,dt = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt = \int_0^{\pi/2}\ln\sin u\,du$ $\left(u=\frac{\pi}{2}-t\right)$. Označme $J=\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt$

Pak 3) $2J = \int_0^{\pi/2}\ln\sin t+\ln\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)dt = -\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^\pi\ln\sin s\,ds = -\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2+J$

Použili jsme symetrii fce $\sin x$, tj. $\int_0^\pi \ln \sin x = 2\int_0^{\pi/2} \ln \sin x$! (8)

$\Rightarrow J = -\frac{\pi}{2}\cdot \ln 2 \Rightarrow \int_0^\pi \ln(1+\cos x)\,dx = \pi \ln 2 + 4\cdot J = \pi\ln 2 - 2\pi \ln 2 = -\pi \ln 2$

$$I(a,b) = \pi \ln\left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right) + \pi \ln b - \pi \ln 2 = \underline{\pi \cdot \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)}$$

Výsledek nezávisí na znaménku $b \Rightarrow$ platí pro $b \in [-a,a]$. Původně na otevřeném intervalu, ale $b=a$ jsme právě spočítali také.

Předpoklady věty:
- měřitelnost a existence derivace triv.
- $f(1,1,x) = \ln(1+\cos x) \in L^1$ (spočítali jsme)
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \frac{1}{|a+b\cos x|} \le \frac{1}{a-|b|} \le \frac{1}{a_0} \in L^1(0,\pi)$ pro $a \ge a_0 > 0$ a $b \in (-a+a_0, a-a_0)$

Věta platí na množině $\{(a,b) : a \ge a_0,\ b \in (-a+a_0, a-a_0)\}$ $\forall a_0 > 0$
tedy na $\{(a,b) : a > 0,\ b \in (-a,a)\}$.

---

(18) $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx\,dx =: I(a,b)$ Pro konvergenci integrálu $a>0$, $b \in \mathbb{R}$

Pozorování: $xe^{-ax} = -\frac{\partial}{\partial a}(e^{-ax})$ Proto $I(a,b) = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}(e^{-ax}\cos bx)\,dx = (!)$

$= -\frac{\partial}{\partial a}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{\partial}{\partial a} J(a,b)$. Spočítáme $J(a,b)$ (2× per partes)

$$J(a,b) = \underbrace{\left[e^{-ax}\frac{\sin bx}{b}\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{a}{b}\cdot\left[-e^{-ax}\frac{\cos bx}{b}\right]_0^\infty - \frac{a^2}{b^2}J(a,b) = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}J(a,b)$$

$$\Rightarrow J(a,b) = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow I(a,b) = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) = -\frac{a^2+b^2-2a^2}{(a^2+b^2)^2} = \underline{\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}} \text{ pro } a>0,\ b\in\mathbb{R}.$$

Předpoklady: pro $f(a,b,x) = e^{-ax}\cos bx$!!
- měřitelnost a ex. derivace triv
- $f(1,b,x) \in L^1$ triviálně
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \le xe^{-ax} \le xe^{-a_0 x}$ pro $a \ge a_0 > 0$.

Věta platí na $[a_0,\infty) \times \mathbb{R}$ $\forall a_0 > 0$, tedy na $(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

---

(19) $\int_0^\infty e^{-ax}\cdot\frac{1-\cos x}{x}\,dx =: I(a)$ Opět potřebujeme $a>0$ pro konvergenci integrálu

$I'(a) = (!) = -\int_0^\infty e^{-ax}\cdot(1-\cos x)\,dx = \left[\frac{e^{-ax}}{a}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx = -\frac{1}{a} + J(a,1)$, kde $J(a,b) = \frac{a}{a^2+b^2}$

je z příkladu (18) $\Rightarrow I'(a) = -\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2+1} \Rightarrow I(a) = -\ln a + \frac{1}{2}\ln(a^2+1) + C = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right) + C$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv.

• $f(1,x) = e^{-x} \cdot \frac{1-\cos x}{x} \in L^1((0,\infty))$

• $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = e^{-ax} \cdot |1-\cos x| \leq \underbrace{2e^{-a_0 x}}_{\in L^1}$ pro $a \geq a_0 > 0$

$\Rightarrow$ Věta platí na $[a_0, \infty)$ $\forall a_0 > 0 \Rightarrow$ na $(0,\infty)$.

Co konstanta?? Nemáme lehce $I(A) = B$ pro nějaké A, musíme jinak.

Lehce ukážeme spojitost $I(a)$ na $(0,\infty)$ a použijeme

$$\lim_{a\to+\infty} I(a) = C = \int_0^\infty \lim_{a\to+\infty} e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\,dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \underline{I = \ln\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}}$$

---

20) $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sinh x}{x}\,dx =: I(a)$ $\quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .... $e^{-ax}\cdot e^{x} \Rightarrow a > 1$ pro konvergenci integrálu!

$$I'(a) = (!) = -\int_0^\infty e^{-ax}\sinh x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(1-a)x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(-1-a)x}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+1}.$$

$$\Rightarrow I(a) = \frac{1}{2}\ln(a+1) - \frac{1}{2}\ln(a-1) + C = \ln\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} + C$$

Opět spojitost $I(a)$: $\lim_{a\to+\infty} I(a) = C = \int_0^\infty \lim_{a\to+\infty} e^{-ax}\frac{\sinh x}{x}\,dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0$

$$\Rightarrow \underline{I(a) = \ln\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}}$$

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triviální

• $f(2,x) = e^{-2x}\frac{\sinh x}{x} \in L^1((0,\infty))$

• $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leq e^{-ax}\cdot e^{x} \leq \underbrace{e^{(-a_0+1)x}}_{\in L^1((0,\infty))}$ $\quad \forall a \geq a_0 > 1$

Spojitost: f spojitá v a

$|f| \leq \frac{e^{(-a_0+1)x}}{x} \in L^1$ $\quad \forall a \geq a_0 > 1$

Obě věty na $[a_0,\infty)$ $\forall a_0 > 1$ $\Rightarrow$ na $(1,\infty)$.

---

21) $I_n(a) = \int_0^1 x^{-a}\ln^n x\,dx$ $\quad$ Pro konvergenci potřebuji $a < 1$ nezávisle na n.

Zavedeme $J(a) = \int_0^1 x^{-a}\,dx = \int_0^1 e^{-a\ln x}\,dx$. Pak (!) $J'(a) = \int_0^1 -x^{-a}\ln x\,dx$.

$J''(a) = \int_0^1 x^{-a}\ln^2 x\,dx$

atd.

Tedy $I_n(a) = (-1)^n J^{(n)}(a)$

Zároveň $J(a) = \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_0^1 = \frac{1}{1-a} \Rightarrow J'(a) = \frac{1}{(1-a)^2}$, $J''(a) = \frac{2}{(1-a)^3}$, ...

$$\Rightarrow J^{(n)}(a) = \frac{n!}{(1-a)^{n+1}} \Rightarrow I_n(a) = (-1)^n\frac{n!}{(1-a)^{n+1}}$$

Předpoklady: $f_n(a,x) = x^{-a} \ln^n x$: • měřitelnost a ex. derivace triv.

• $f_n(-1,x) = x \ln^n x \in L^1((0,1))$

• $\left|\frac{\partial f_n}{\partial a}\right| \leq C \cdot x^{-a-\varepsilon} \leq C \cdot x^{-a_0-\varepsilon} \in L^1$ pro $a \leq a_0 < 1-\varepsilon$ a lib. $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ Věta platí pro $(-\infty, a_0)$ $\forall a_0 < 1-\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

Tedy pro $(-\infty, a_0)$ $\forall a_0 < 1$, tedy pro $(-\infty, 1)$.

---

22 $I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x)\, dx$

Konvergence: u 0 není problém nikdy

u $\pi/2$: $\cos x \sim x - \pi/2$, tj. $f \sim \ln\left(\frac{1}{(x-\pi/2)^2}\right)$

a to je integrovatelné.

Potřebujeme pouze $(a,b) \neq (0,0)$ pro dobrou definici logaritmu.

Symetrie: Stačí uvažovat $a>0, b>0$.

$$\frac{\partial I}{\partial b} = (!) = \int_0^{\pi/2} \frac{2b \operatorname{tg}^2 x}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \left| t = \operatorname{tg} x \right| = \int_0^\infty \frac{2bt^2}{a^2 + b^2 t^2} \cdot \frac{dt}{t^2+1} = 2b \int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{a^2}{b^2t^2 + a^2}\right) \cdot \frac{1}{b^2 - a^2}\, dt$$

$$= \frac{2b}{b^2-a^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{1}{1 + (\frac{b}{a} t)^2}\, dt\right) = \frac{2b}{b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{b}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{b+a}$$

$$I = \int \frac{\pi}{b+a}\, db = \pi \cdot \ln(b+a) + C(a)$$

$$b=a: \; I(a,a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x))\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \ln a^2 + \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \pi \ln a - 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos x\, dx$$

$$= \pi \ln a - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2\right)$$

$\parallel$

$\pi \ln(2a) + C(a)$

VIZ PŘÍKLAD 17

$$\Rightarrow \pi \ln 2 + \pi \ln a + C(a) = \pi \ln a + \pi \ln 2$$

$$\Rightarrow C(a) = 0 \; !!$$

$\Rightarrow I = \pi \cdot \ln(b+a)$ pro $b>0, a>0$, ze symetrie proto $\underline{I = \pi \cdot \ln(|a| + |b|)}$

Na osách: $b=0$: $I(a,0) = \int_0^{\pi/2} \ln a^2\, dx = \pi \cdot \ln|a|$, tj. vzorec ↑ platí.

$$a=0: \; I(0,b) = \int_0^{\pi/2} \ln(b^2 \operatorname{tg}^2 x)\, dx = \pi \cdot \ln|b| + \int_0^{\pi/2} 2 \cdot \ln \operatorname{tg} x\, dx = \left| t = \operatorname{tg} x \right| = \pi \ln|b| + 2 \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt$$

$$\text{TRIK: } \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt}_{s = \frac{1}{t}:\; = \int_\infty^1 \frac{\ln \frac{1}{s}}{(\frac{1}{s})^2 + 1} \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) ds = -\int_1^\infty \frac{\ln s}{s^2+1}\, ds} + \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt \;\Rightarrow\; \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt = 0 \; !!$$

$\Rightarrow$ vzorec platí i pro $a=0, b \neq 0$.

Předpoklady: • měřitelnost a ex. derivace triv

• $f(1,1,x) \in L^1$ ... spočítali jsme

• majoranta: $\left|\frac{\partial I}{\partial b}\right| \leq \frac{2}{b} \leq \frac{2}{b_0}$ pro $b \geq b_0 > 0, a > 0$

Věta lze použít pro $a>0$, $b \in [b_0, \infty)$ $\forall b_0 > 0$

Tj. pro $b \in (0, \infty)$

23 $$I(a) = \int\limits_{\substack{x>0\\y>0}} e^{-\left(x+y+\frac{a^3}{xy}\right)} x^{-1/3} y^{-2/3}\,dx\,dy$$

Aby exp nevybouchla na osách, potřebujeme $a \geq 0$!!

$$I'(a) = (!) = \int\limits_{\substack{x>0\\y>0}} -\frac{3a^2}{xy} e^{-\left(x+y+\frac{a^3}{xy}\right)} x^{-1/3} y^{-2/3}\,dx\,dy = -3a^2 \int\limits_{\substack{x>0\\y>0}} e^{-\left(x+y+\frac{a^3}{xy}\right)} x^{-4/3} y^{-5/3}\,dx\,dy =$$

$$\overset{\text{Fub}}{=} -3a^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{-4/3} \left(\int_0^\infty e^{-y} \cdot e^{-\frac{a^3}{xy}} \cdot y^{-5/3}\,dy \right) dx$$

. Vnitřní integrál: subst. $t = \frac{a^3}{xy} \Rightarrow y = \frac{a^3}{xt}$

$$dt = -\frac{a^3}{xy^2}\,dy$$

$$dy = -\frac{xy^2}{a^3}\,dt = -\frac{x}{a^3} \cdot \frac{a^6}{x^2 t^2}\,dt = -\frac{a^3}{xt^2}\,dt$$

$$= -3a^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{-4/3} \left(\int_\infty^0 e^{-\frac{a^3}{xt}} \cdot e^{-t} \cdot \left(\frac{a^3}{xt}\right)^{-5/3} \cdot \left(-\frac{a^3}{xt^2}\right) dt \right) dx$$

$$= -3a^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{-4/3} \left(\int_0^\infty e^{-t} e^{-\frac{a^3}{xt}} \cdot a^{-2} \cdot x^{2/3} t^{-1/3}\,dt \right) dx$$

$$= -3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} e^{-t} e^{-\frac{a^3}{xt}} x^{-2/3} t^{-1/3}\,dt\,dx \overset{\text{FUB}}{=} -3 \int\limits_{\substack{x>0\\t>0}} e^{-\left(x+t+\frac{a^3}{xt}\right)} x^{-2/3} t^{-1/3}\,dx\,dt = -3I$$

(stačí přejmenovat proměnné, int. obor je symetrický v x a y)

$\Rightarrow I' = -3I \Rightarrow I = C \cdot e^{-3a}$. $C > 0$ protože I je očividně kladné.

I spojitá (!) $\quad I(0) = \left(\int\limits_{x>0} e^{-x} x^{-1/3}\,dx \right) \cdot \left(\int\limits_{y>0} e^{-y} y^{-2/3}\,dy \right) = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, kde

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt$ pro $z > 0$ je zobecnění faktoriálu $\left(\Gamma(n) = (n-1)!\right)$

Platí $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-3a}}$

Předpoklady:
- měřitelnost a ex. derivace triv
- $f(1,x,y) \leq e^{-x-y} x^{-1/3} y^{-2/3} \in L^1 \Rightarrow f(1,x,y) \in L^1$
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|$ … obtížnější! Platí: $3\lambda e^{-\lambda} \leq C$ pro $\lambda \in (0,\infty)$

$$\Rightarrow \frac{3a^2 e^{-\frac{a^3}{xy}}}{xy} \leq C \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leq \frac{C}{a} \cdot e^{-x} e^{-y} x^{-1/3} y^{-2/3} \leq \underbrace{\frac{C}{a_0} e^{-x} e^{-y} x^{-1/3} y^{-2/3}}_{\in L^1}$$

pro $a \geq a_0 > 0$.

Spojitost: Majoranta pro $|f|$: $\leq e^{-x} e^{-y} x^{-1/3} y^{-2/3} \in L^1$

$\Rightarrow$ Obě věty lze použít (derivaci pro $a \in (a_0, \infty)$ $\forall a_0 \Rightarrow a \in (0,\infty)$)
(spojitost pro $a \in [0,\infty)$)

24 $I=\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$ ... očividně konverguje, v 0 problém není a v $\pi/2$ jde fce k nule.

$I:=I(1)$, kde $I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$ ... konverguje $\forall a\in\mathbb{R}$

$$I'(a)=(!)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}\,dx \;\Big|\; t=\operatorname{tg}x \;\Big| = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt \overset{\text{pro } a\neq 1}{=} \int_0^\infty\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{a^2}{1+a^2t^2}\right)\cdot\frac{1}{1-a^2}\,dt$$

$=\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{1-a^2}\cdot a\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}$ pro $a>0$, $a\neq 1$. Zkoumat záporná a nemusíme, stačí nám okolí $a=1$. Pro $a=1$ je $\int_0^\infty\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$ (viz příklad 9) $\Rightarrow$ vzorec platí

$$\left.\begin{aligned} I(a)&=\int I'(a)\,da=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+C\\ I(0)&=0=C\end{aligned}\right\}\; I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a) \text{ a tedy } I=I_1=\underline{\frac{\pi}{2}\ln 2}$$

Předpoklady:
- měřitelnost a ex. derivace OK (pro $f(a,x)=\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}$)
- $f(0,x)=0\in L^1$ OK
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\leq 1\in L^1$ OK

---

25 $\int_0^\infty\frac{\sin^4x}{x^2}\,dx$ ... očividně konverguje, v ∞ $\sim\frac{1}{x^2}$, v 0 omezená.

$$I(a):=\int_0^\infty e^{-ax^2}\frac{\sin^4x}{x^2}\,dx \Rightarrow I'(a)=(!)=-\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin^4x\,dx=-\frac38\int_0^\infty e^{-ax^2}dx+\frac12\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos 2x\,dx-\frac18\int e^{-ax^2}\cos 4x\,dx$$

Použijeme 14: $I'(a)=\underbrace{-\frac{3}{16}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}_{A}+\underbrace{\frac14\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac1a}}_{B}\underbrace{-\frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac4a}}_{C}$

$I(a)=\int A+\int B+\int C$

$\int A=-\frac{3}{16}\sqrt{\pi}\int a^{-1/2}\,da=-\frac38\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{a}$

$\int B=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\int a^{-1/2}e^{-\frac1a}\,da$ ... to není elementární integrál. Per partes: $u=e^{-1/a}$, $u'=\frac{e^{-1/a}}{a^2}$, $v'=a^{-1/2}$, $v=2a^{1/2}$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(2\sqrt{a}\,e^{-1/a}-2\int\frac{e^{-1/a}}{a^{3/2}}\,da\right)\underset{\substack{b=a^{-1/2}\\ db=-\frac12 a^{-3/2}da}}{=}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\Big(2\sqrt{a}\,e^{-1/a}+4\underbrace{\int e^{-b^2}db}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}b}\Big)=\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(2\sqrt{a}\,e^{-1/a}+2\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right)}$$

$$\int C=-\frac{\sqrt{\pi}}{16}\int a^{-1/2}e^{-\frac4a}\,da\underset{a=4\tilde a}{=}-\frac{\sqrt{\pi}}{16}\int 4^{-1/2}\tilde a^{-1/2}e^{-\frac{1}{\tilde a}}\cdot 4\,d\tilde a=-\frac{\sqrt{\pi}}{8}\int\tilde a^{-1/2}e^{-\frac{1}{\tilde a}}\,d\tilde a=-\frac{\sqrt{\pi}}{8}\left(\sqrt{a}\,e^{-4/a}+2\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{8}\cdot\left(-3\sqrt{a}+4\sqrt{a}\,e^{-1/a}-\sqrt{a}\,e^{-4/a}+4\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)-2\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)\right)+C$$

13

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{8}\cdot\left[\sqrt{a}\cdot\left(-3+4e^{-1/a}-e^{-4/a}\right)+\underbrace{4\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}_{\to 0}-\underbrace{2\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)}_{\to 0}\right]\right)+C$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{8}\cdot\lim \sqrt{a}\cdot\left(-3+4\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{a}\right)+\left(-\frac{1}{a^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{a^2}\right)\right)-\left(1+\left(-\frac{4}{a}\right)+\left(-\frac{4}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+o\left(\frac{4}{a^2}\right)\right)\right)+C$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{8}\cdot\lim \underbrace{\sqrt{a}\cdot\left(\frac{2}{a^2}-\frac{8}{a^2}+o\left(\frac{1}{a^2}\right)\right)}_{\to 0}+C = C$$

ale $\lim_{a\to\infty} I(a) = (!) = \int_0^\infty \lim_{a\to\infty} e^{-ax^2}\frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0$

$\Big\}\ C=0$

Konečně $I(0) = \lim_{a\to 0_+} I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\cdot\left(4\sqrt{\pi}-2\sqrt{\pi}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$

Předpoklady: $f(a,x) = e^{-ax^2}\frac{\sin^4 x}{x^2}$:
- měřitelnost a ex. derivace OK
- $f(1,x) = e^{-x^2}\frac{\sin^4 x}{x^2} \in L^1$ očividně
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \le e^{-ax^2} \le e^{-a_0x^2}$ $\forall a \ge a_0 > 0$
- $|f| \le e^{-ax^2} \le e^{-a_0x^2}$ $\forall a \ge a_0 > 0$.

Spojitost: derivaci mám na (a_0,∞) $\forall a_0>0 \Rightarrow$ na $(0,\infty)$ (Spojitost i na $[0,\infty)$)

---

(26) $F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$F(0)=0$ F sudá očividně

Konvergence integrálu: v $x=0$: $\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2} \sim -a^2$, $\sqrt{1-x^2}$ nevadí

$\Rightarrow$ v $x=0$ konverguje $\forall a\in\mathbb{R}$

v $x=1$: $\sqrt{1-x^2} \sim \sqrt{1-x}$, to je integrovatelné, ln neuškodí.

Pro dobrou definici potřebujeme $1-a^2x^2>0$ na $(0,1)$, tj. $1-a^2>0$, $|a|<1$.

Krajní bod $a=1$ vyšetříme později. Nyní ze sudosti tedy $a\in(0,1)$

$$F'(a) = (!) = \int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= -2a\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}}_{f(a)}$$

Očividně $F'(0)=0$ a $F'(a)<0$ pro $a>0$
$F'(a)>0$ pro $a<0$

(integrujeme kladnou funkci) $\Rightarrow$ $a=0$ je bod lok. maxima

$$f'(a) = (!) = \int_0^1 + \frac{2ax^2}{(1-a^2x^2)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\Bigg\}\ F''(a) = \int_0^1 \frac{-2(1-a^2x^2)-4a^2x^2}{(1-a^2x^2)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{-2-2a^2x^2}{(1-a^2x^2)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= -2\int_0^1 \frac{1+a^2x^2}{(1-a^2x^2)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$\Rightarrow F''(a)<0$ $\forall a\in(-1,1) \Rightarrow$ F je konkávní na $(-1,1)$, rostoucí na $(-1,0)$
klesající na $(0,1)$, sudá, v $a=0$ má maximum, nemá infl. body

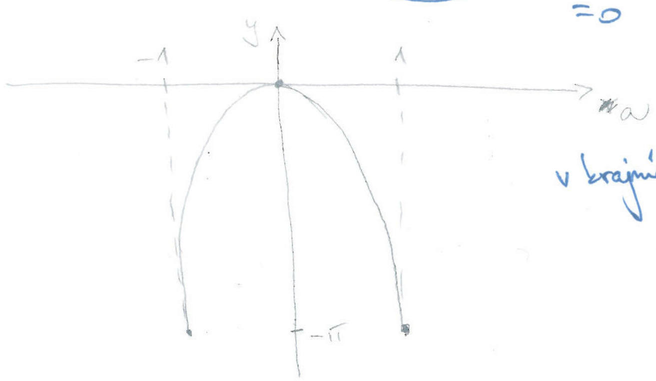
Pro $a\to 1_-$ je $F'(a)\to-\infty$, protože $\int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ diverguje.

Ještě dopočítáme $F(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} \text{per partes.} & \\ u = \ln(1-x^2) & v' = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \\ u' = \frac{-2x}{1-x^2} & v = ? \end{matrix} \right|$

14

$$v = \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t\,\cos t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot g\, t = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Zpět k per partes: $F(1) = \underbrace{\left[\ln(1-x^2)\cdot(-1)\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\left[\arcsin x\right]_0^1 = \underline{-\pi}$



v krajních bodech nekonečné jednostranné derivace

Předpoklady:
- měřitelnost, spojitost, ex. derivace pro $f(a,x) = \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ triv.
- $f(0,x) = 0 \in L^1$
- $|f| \leq 2a^2\cdot 2$ na okolí nuly ≤ 4 $\forall a \in (-1,1)$ $\left(\left|\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2}\right| \leq 2a^2, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq 2\right)$

  $|f| \leq \underbrace{2\cdot(1-x)^{-1/2}\cdot|\ln(1-x^2)|}_{\in L^1}$ na okolí jedničky $\forall a \in (-1,1)$

  $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leq \frac{1}{1-a_0^2x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in L^1$ $\forall a \in (-a_0,a_0)$, $a_0 < 1$

  $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\right| \leq \frac{4}{(1-a_0^2x^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in L^1$ —— " ——

$\Rightarrow$ Spojitost na $[-1,1]$, derivace na $(-1,1)$.