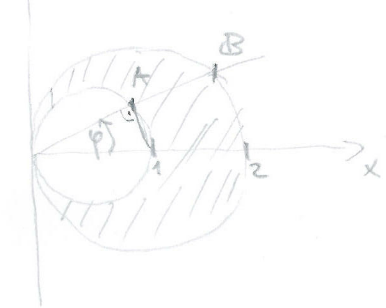
5c) $z = x^2 + y^2$ .... rotační paraboloid

$x^2 + y^2 = x$ .... $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ... válec

$x^2 + y^2 = 2x$ ... $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ... válec

$z = 0$ ... rovina

rovina $z=0$



Válcové souřadnice : $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

$J_\varphi = r$

z běhá očividně mezi 0 a $x^2 + y^2 = r^2$

kde běhá r? Najdeme body na kružnicích (A, B)

$\Delta : (0,0), (1,0), A$ je pravoúhlý ~~..~~, přepona má délku 1, $\Rightarrow$ délka odvěsny je $\cos\varphi$!
Podobně vzdálenost mezi počátkem a B je $2\cos\varphi$ $\Rightarrow$ $r \in (\cos\varphi, 2\cos\varphi)$,
a nakonec $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ [ze symetrie by stačilo $\varphi \in (0, \pi/2)$ a vynásobit 2.

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \int_0^{r^2} r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r \cdot r^2 \, dr \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos\varphi)^4 - (\cos\varphi)^4 \, d\varphi$$

$$= \frac{15}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi \, d\varphi = \frac{15}{16} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + \underbrace{2\cos 2\varphi}_{=0} + \cos^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{15}{16}\pi + \frac{15}{32} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt}_{=\pi} = \underline{\underline{\frac{45}{32}\pi}}$$

5d) $z = e^{-(x^2+y^2)}$ ... horní plocha

$z = 0$ --- rovina

$x^2 + y^2 = R^2$ --- válec

Jasné válcové souřadnice
$z \in (0, e^{-r^2})$
$r \in (0, R)$
$\varphi \in (0, 2\pi)$

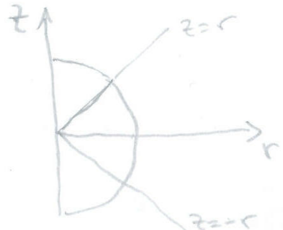
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{e^{-r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R r e^{-r^2} \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^R r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^{R^2} e^{-t} dt$$

$$= -\pi \left[e^{-t} \right]_0^{R^2} = \underline{\pi (1 - e^{-R^2})}$$

5e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Pro představu $a, b, c = 1$: ... koule (sféra)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$



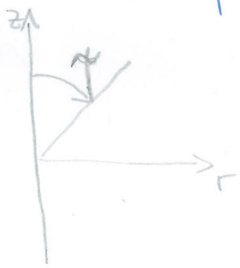
... $z^2 = r^2$, tj. $z = \pm r$ ... kuželová plocha

Škálované sférické souřadnice:

$$x = ar\sin\psi\cos\varphi$$
$$y = br\sin\psi\sin\varphi$$
$$z = cr\cos\psi$$

$r \in (0,\infty)$
$\varphi \in (0,2\pi)$
$\psi \in (0,\pi)$

Touto volbou je ψ úhel měřený takto:



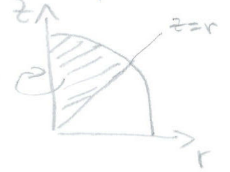
$\psi = 0 \Rightarrow z$ je maximální
$\psi = \pi/2 \Rightarrow z = 0$
$\psi = \pi \Rightarrow z$ je minimální

$$J_\varphi = \begin{vmatrix} a\sin\psi\cos\varphi & -ar\sin\psi\sin\varphi & ar\cos\psi\cos\varphi \\ b\sin\psi\sin\varphi & br\sin\psi\cos\varphi & br\cos\psi\sin\varphi \\ c\cos\psi & 0 & -cr\sin\psi \end{vmatrix}$$

$$= abc\cdot r^2\cdot\left[-\sin^3\psi\cos^2\varphi - \sin\psi\cos^2\psi\sin^2\varphi - \sin\psi\cos^2\psi\cos^2\varphi - \sin^3\psi\sin^2\varphi\right]$$

a $|J_\varphi| = abc\, r^2\cdot\sin\psi$. (Při neškálovaných vyjde prostě $r^2\sin\psi$)

Zadání umožňuje různý výklad, my spočítáme objem tohoto



Tedy: $r \in (0,1)$
$\varphi \in (0,2\pi)$
$\psi \in (0,\pi/4)$ ... $\pi/4$ odpovídá $z = r$!!

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\pi/4} r^2\sin\psi\, d\psi\, dr\, d\varphi \underset{\cdot abc}{=} 2\pi\left(\int_0^1 r^2\, dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/4}\sin\psi\, d\psi\right)\underset{\cdot abc}{=} \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot abc}}$$

5f) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\quad x=0,\ y=0,\ z=0$ ... tedy 1. kvadrant

Lze spočítat bez převodu souřadnic, jen si zjednodušíme práci: $\tilde{x} = \frac{x}{a}$, $\tilde{y} = \frac{y}{b}$, $\tilde{z} = \frac{z}{c}$ $\Rightarrow$ $x = a\tilde{x}$, $y = b\tilde{y}$, $z = c\tilde{z}$

$J_\varphi = abc$ triviálně a stačí nám vyřešit

úlohu $(\tilde{x}+\tilde{y})^2 + \tilde{z}^2 = 1$, $\tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0, \tilde{z} = 0$. Výsledek pak přenásobíme abc a je to.

Pro jednoduchost zápisu dále bez vlnovek.

Zvolíme x jako vnější proměnnou, očividně největší možné x je $x = 1$. Tj. $x \in (0,1)$.

Pro pevné $x \in (0,1)$ je maximální možné y $\quad y = 1-x$. Tedy $y \in (0, 1-x)$

Nakonec pro dané (x,y) je $z \in \left(0, \sqrt{1-(x+y)^2}\right)$

Tedy $$V = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\sqrt{1-(x+y)^2}} 1\, dz\, dy\, dx = \int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{1-(x+y)^2}\, dy\, dx.$$

$\cos^2\varphi$ pomocí $\cos 2\varphi$ a $\sin(2\arcsin x)$ pomocí součtového vzorce

Vnitřní integrál: $$\int_0^{1-x}\sqrt{1-(x+y)^2}\, dy = \int_x^1\sqrt{1-t^2}\, dt \overset{t=\sin\varphi}{=} \int_{\arcsin x}^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

Zbývá $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi}{4} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arcsin x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^0 \frac{\sqrt{t}\,dt}{4} - \frac{1}{2}\left(\left[x\arcsin x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)$

$t = 1-x^2$, $dt = -2x\,dx$ (pro $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$)

$\uparrow$ $t = 1-x^2$, $dt = -2x\,dx$

$\uparrow$ počítá se per partes

$\displaystyle = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_1^0 t^{-1/2}\,dt$

$\displaystyle = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Původní příklad tedy $\displaystyle \underline{\underline{V = \frac{abc}{3}}}$

5g) DÚ

6a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^{\infty} r e^{-r^2}\,dr = \pi\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = \pi$

Důsledek: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)} = \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy\right)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy}$

$= \sqrt{\pi}$

Přitom $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ neumíme spočítat, nemá elementární primitivní funkci!!

6b) $\int\limits_\Omega x^{-p} y^{-q}\,dx\,dy \qquad \Omega=\{x\ge 1, y\ge \frac{1}{x}\}$

$$\overset{\shortparallel}{\int_1^\infty \int_{\frac{1}{x}}^\infty} x^{-p}y^{-q}\,dy\,dx = \int_1^\infty x^{-p}\cdot\left[\frac{y^{1-q}}{1-q}\right]_{\frac{1}{x}}^\infty dx$$

(pro $q=1$ vyjde $\ln y$ a stejný problém)

$\longrightarrow$ potřebuji $q>1$, aby $1-q<0$, jinak je integrál nekonečný!!

Pro $q>1$: $$\int_1^\infty x^{-p}\cdot x^{q-1}\cdot\frac{1}{q-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{q-1}\int_1^\infty x^{q-p-1}\,dx = \frac{1}{q-1}\cdot\left[\frac{x^{q-p}}{q-p}\right]_1^\infty$$ ... potřebuji $p>q$!

Pro $q>1$, $p>q$: $$= \underline{\underline{\frac{1}{q-1}\cdot\frac{1}{p-q}}}$$

6c) $\int\limits_\Omega (x+y)^{-p}\,dx\,dy \qquad \Omega=\{x+y\ge 1, x\in[0,1]\}$

$$\overset{\shortparallel}{\int_0^1\int_{1-x}^\infty} (x+y)^{-p}\,dy\,dx \underset{\substack{t=x+y\\ dt=dy}}{=} \int_0^1\int_1^\infty t^{-p}\,dt\,dx = \int_1^\infty t^{-p}\,dt = \underline{\frac{1}{p-1}}$$ pro $p>1$

Pro $p\le 1$ nemá konečný integrál.

---

7) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3} \qquad x,y,a>0$

Víme: $$[T_x,T_y]=\left[\frac{\int x\,dx\,dy}{\int 1\,dx\,dy}, \frac{\int y\,dx\,dy}{\int 1\,dx\,dy}\right]$$

Deska je symetrická $\Rightarrow T_x=T_y$.

Nadšíří se $x=r\cos^3\varphi$, $y=r\sin^3\varphi$ pro $r\in(0,a)$, $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$J_\varphi=\begin{vmatrix}\cos^3\varphi & -3r\cos^2\varphi\sin\varphi\\ \sin^3\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi\end{vmatrix} = 3r\cos^4\varphi\sin^2\varphi+3r\cos^2\varphi\sin^4\varphi = 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi$$

$$\int 1\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^{\pi/2} 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\,dr = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$

$2\varphi=t$, $2d\varphi=dt$

$$=\frac{3}{16}a^2\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \frac{3\pi a^2}{32}.$$

$$\int x\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^{\pi/2} 3r^2\cos^5\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\,dr = a^3\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = a^3\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot(1-\sin^2\varphi)^2\cdot\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$= a^3\cdot\int_0^1(1-t^2)^2\cdot t^2\,dt = a^3\int_0^1 t^2-2t^4+t^6\,dt = a^3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right) = a^3\cdot\frac{35-42+15}{105} = a^3\frac{8}{105}$$

Proto $T_x = T_y = \dfrac{\frac{8}{105}a^3}{\frac{3\pi a^2}{32}} = \underline{\underline{a \cdot \dfrac{256}{315\pi}}}$

---

8 $(x-a)^2+(y-a)^2 = a^2$ $\quad x=0$, $y=0$, $x \in (0,a)$

$I_x = \int x^2\,dx\,dy$

$I_y = \int y^2\,dx\,dy$

Posunuté polární souřadnice: $x = a + r\cos\varphi$
$y = a + r\sin\varphi$

$\Rightarrow r \in (0,a)$, $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$, $J_\varphi = r$ platí stále

$$I_x = \int_0^a \int_{\pi/2}^{3/2\pi} (a + r\cos\varphi)^2\, r\,d\varphi\,dr = \int_{\pi/2}^{3/2\pi} \int_0^a a^2 r + 2ar^2\cos\varphi + r^3\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\pi/2}^{3/2\pi} \left(\frac{a^4}{2} + \frac{2}{3}a^4\cos\varphi + \frac{a^4}{4}\cos^2\varphi\right) d\varphi = \frac{\pi a^4}{2} - \frac{4}{3}a^4 + \frac{\pi a^4}{8} = \underline{\underline{a^4\left(\frac{5}{8}\pi - \frac{4}{3}\right)}}$$

$$I_y = \int_{\pi/2}^{3/2\pi} \int_0^a (a + r\sin\varphi)^2\, r\,dr\,d\varphi = \int_{\pi/2}^{3/2\pi} \int_0^a a^2 r + 2ar^2\sin\varphi + r^3\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\pi/2}^{3/2\pi} \frac{a^4}{2} + \frac{2}{3}a^4\sin\varphi + \frac{a^4}{4}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi a^4}{2} + 0 + \frac{\pi a^4}{8} = \underline{\underline{\frac{5}{8}\pi a^4}}$$

---

9 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$ .... kužel postavený na špičce.

Ze symetrie $T_x = T_y = 0$!! $\qquad T_z = \dfrac{\int z\,dx\,dy\,dz}{\int 1\,dx\,dy\,dz}$

Úvaha: Převodem do $\tilde{x} = \frac{x}{a}$, $\tilde{y} = \frac{y}{b}$, $\tilde{z} = \frac{z}{c}$ bude $\int 1\,dx\,dy\,dz = abc \int 1\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}\,d\tilde{z}$

a $\int z\,dx\,dy\,dz = abc^2 \int \tilde{z}\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}\,d\tilde{z}$

Výsledek pak bude $T_z = c \cdot T_{\tilde{z}}$, kde $T_{\tilde{z}}$ jsou souřadnice středu tělesa $x^2+y^2=z^2$, $z \le 1$.

$$\int 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^z r\,dr\,dz\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{z^2}{2}\,dz\,d\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\int z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^z z\,r\,dr\,dz\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{z^3}{2}\,dz\,d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$T_z = \frac{3}{4}$, tj. původní úloha

$T_z = \frac{3}{4}c$

$T = [0, 0, \frac{3}{4}c]$

10

$$m = \int_\Omega \rho \, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gz} r \, dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{2\pi R^2}{2}\cdot\int_0^h \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gz}dz = \rho_0\pi R^2\int_0^h \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0}gz\right)dz = \underline{\underline{\frac{p_0\pi R^2}{g}\left(1-e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh}\right)}}$$

<u>Leviho věta</u>: $\{f_n\}_1^\infty \subset L$, $f_n \nearrow f$

Potom $\int \lim f_n = \lim \int f_n$ (může být nekonečný)

<u>Varianta pro řady</u>: $\{f_n\}_1^\infty \subset L$, $f_n \geq 0$

Potom $\int \sum_1^\infty f_n = \sum_1^\infty \int f_n$

<u>Lebesgueova věta</u>: $\{f_n\}_1^\infty \subset L$, $f_n \to f$ s.v. a $\exists g \in L\ \forall n \in N: |f_n| \leq g$

Potom $f \in L$ a $\int \lim f_n = \lim \int f_n$

Tedy: Levi: monotonie + odhad

Lebesgue: bez monotonie, ale s majorantou

---

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}dx$ $\quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ $\quad$ na $x\in(0,1)$ je $\left.\begin{matrix} x^n < 1 \\ \frac{1}{n} < 1\end{matrix}\right\} \frac{x^n}{n} < 1$

$|f_n(x)| \leq 1$, $\int_0^1 1\,dx = 1$ ... 1 je majoranta, použiju Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{n}dx = \int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}dx = \int_0^1 0\,dx = \underline{\underline{0}}$$

---

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,dx$ $\quad e^{-x}$ vše převáluje $\Rightarrow$ hledám majorantu

Velmi hrubě: $\frac{\ln(x+n)}{n} \leq \frac{x+n}{n} \leq x+1$ pro velká n

$|f_n(x)| \leq e^{-x}\cdot(x+1)$ ... to je očividně integrovatelná majoranta

$\Rightarrow \lim\int = \int\lim = \int 0\,dx = 0$ $\quad$ protože $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n} = 0$ ze srovnávací limity