Domácí úkol 8

Termín odevzdání: 10. 12. 2025 do večera

1.)

Najděte hmotnost plochy $x^2 + y^2 = 1$ omezené $y^2 + z^2 \leq 1$ s plošnou hustotou

$$\sigma(x, y, z) = \frac{z^2}{2 + y}$$

Řešení: Plocha je část hranice průniku dvou válců. Proto ji parametrizujme válcovými souřadnicemi

$$\begin{aligned} x &= \cos(\psi) \\ y &= \sin(\psi) \\ z &= z, \end{aligned}$$

poloměr vyťatého válce je 1. Díky symetrii nám stačí spočítat příspěvek v poloprostoru $x \geq 0$, tedy $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a poté výsledek vynásobit dvěma. Interval pro parametr z dostaneme z rovnice druhého válce

$$\begin{aligned} z^2 &\leq 1 - y^2 \\ z^2 &\leq 1 - \sin^2(\psi) \\ z^2 &\leq \cos^2(\psi) \\ z &\in \big(-\cos(\psi), \cos(\psi)\big) \end{aligned}$$

Nakonec musíme správně transformovat také plošný element $\mathrm{d}S$. Spočtěme tečné vektory k parametrizované ploše jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial \psi} &= \big(-\sin(\psi), \cos(\psi), 0\big) \\ \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial z} &= (0, 0, 1)\,, \end{aligned}$$

proto normálu můžeme psát jako

$$\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial z} = \big(\cos(\psi), \sin(\psi), 0\big) \qquad \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial z} \right\| = 1.$$

Hmotnost plochy s danou hustotou tedy spočítáme přes integrál

$$\begin{aligned} &2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\cos(\psi)}^{\cos(\psi)} \frac{z^2}{2 + y} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\psi = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(\psi)}{2 + \sin(\psi)} \,\mathrm{d}\psi = \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} \frac{1 - t^2}{2 + t} \,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} 2 - t - \frac{3}{2 + t} \,\mathrm{d}t = \frac{16}{3} - 4\ln(3) \end{aligned}$$

□

2.)

Spočtěte hyper-povrch 3-sféry (3-kulové slupky) s poloměrem r v $\mathbb{R}^4$.

Řešení: Rovnice 3-sféry ve $\mathbb{R}^4$ vypadá takto:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2.$$

Podobně jako ve 3D najdeme vhodnou parametrizaci, která nám automaticky zajistí splnění této vazby. Je tvaru

$$\overrightarrow{\varphi} = \begin{pmatrix} r\sin(\xi)\sin(\theta)\cos(\psi) \\ r\sin(\xi)\sin(\theta)\sin(\psi) \\ r\sin(\xi)\cos(\theta) \\ r\cos(\xi) \end{pmatrix}$$

Co se týče mezí pro parametry ψ, θ a ξ, pro nabytí hodnot od -1 do 1 stačí interval $(0, \pi)$, přičemž jeden parametr musí jít od $(0, 2\pi)$. My zvolíme ψ podobně jako ve 3D. Spočtěme Gramovu matici.

$$\overrightarrow{o} = \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial\psi} = \big(-r\sin(\xi)\sin(\theta)\sin(\psi),\ \ r\sin(\xi)\sin(\theta)\cos(\psi),\ \ 0,\ \ 0\big)$$
$$\overrightarrow{p} = \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial\psi} = \big(r\sin(\xi)\cos(\theta)\cos(\psi),\ \ r\sin(\xi)\cos(\theta)\sin(\psi),\ \ -r\sin(\xi)\sin(\theta),\ \ 0\big)$$
$$\overrightarrow{q} = \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial\psi} = \big(r\cos(\xi)\sin(\theta)\cos(\psi),\ \ r\cos(\xi)\sin(\theta)\sin(\psi),\ \ r\cos(\xi)\cos(\theta),\ \ -r\sin(\xi)\big)$$

Lehce ověříme, že platí

$$\overrightarrow{o}\cdot\overrightarrow{p} = 0 \qquad \overrightarrow{o}\cdot\overrightarrow{q} = 0 \qquad \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} = 0$$
$$\overrightarrow{o}\cdot\overrightarrow{o} = r^2\sin^2(\xi)\sin^2(\theta) \qquad \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{p} = r^2\sin^2(\xi) \qquad \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{q} = r^2$$

Sestavme Gramovu matici a spočtěme její determinant.

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2(\xi)\sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathbb{G}) = r^6\sin^4(\xi)\sin^2(\theta)$$

Hyper-povrch se pak dostane z integrálu

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} r^3\sin^2(\xi)\sin(\theta)\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\psi = 2\pi^2 r^3$$

□