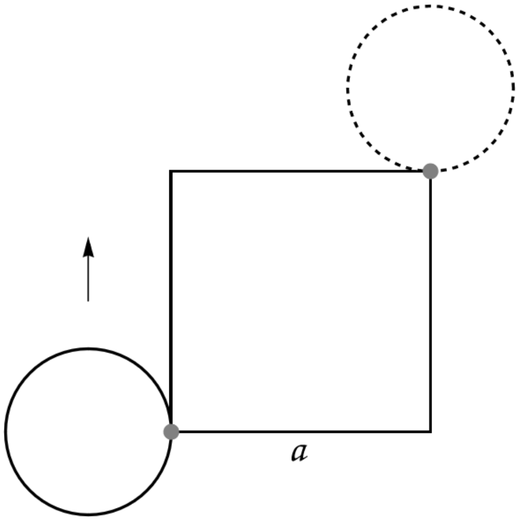
Domácí úkol 7

Termín odevzdání: 4. 12. 2025 do večera

1.)

Uvažujte kružnici valící se (bez prokluzování) po čtverci se stranou délky a,



Obrázek 1: Kružnice a čtverec

Spočtěte délku křivky, podél které se pohybuje šedý bod na kružnici, který se čtverce dotkne pouze na začátku a přesně na konci pohybu.

Řešení:
Rozdělíme si pohyb kružnice na tři části; kutálení po hraně, překlenutí přes roh a opět kutálení pohraně do cíle (tak jak je znázorněno na obrázku). Jelikož se šedý bod dotkne čtverce právě dvakrát a to na začátku a na konci, je poloměr kružnice už jednoznačně daný a to tím, že šedý bod musí být při překlenování přes roh přímo na druhé straně kružnice (než je pivot). Proto se musí strana a rovnat odvalení poloviny kružnice, neboli πr, tudíž

$$r = \frac{a}{\pi}.$$

Parametrizujme nejprve kutálení po levé straně čtverce. Střed kružnice se bude pohybovat rovnoměrnou rychlostí, snadno popsatelné jako

$$S_k = \begin{bmatrix} -\frac{a}{\pi} \\ t \end{bmatrix}$$

Nyní se musíme zamyslet jak se pohybuje šedý bod, vůči středu S_k. Popišme jeho pohyb pomocí úhlu γ, který svírá jeho spojnice s x-ovou osou. Víme, že musí platit rovnost mezi uraženou vzdáleností kružnice t a odvalenou částí kružnicového oblouku $\frac{a}{\pi}\gamma$. Proto

$$\gamma = -\frac{\pi}{a}t,$$

$$S - S_k = \begin{bmatrix} \frac{a}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{a}t\right) \\ \frac{a}{\pi}\sin\left(-\frac{\pi}{a}t\right) \end{bmatrix},$$

a tedy

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{a}{\pi} + \frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{a}t\right) \\ t - \frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) \end{bmatrix}.$$

Můžeme tedy směle derivovat křivku popsanou $\overrightarrow{\varphi}(t) = S$

$$\overrightarrow{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) \\ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{a}t\right) \end{pmatrix},$$

a z toho dále spočítat velikost tečného vektoru

$$\left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\| = \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{a}t\right) + 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{a}t\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{a}t\right)} = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{a}\right)} =$$

$$= 2\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2a}t\right)} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2a}t\right).$$

Délka cykloidy, po které se šedý bod pohybuje v první části, je tedy

$$\int_0^a 2\sin\left(\frac{\pi}{2a}t\right)\,\mathrm{d}t = -2\frac{2a}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2a}t\right)\right]_0^a = \frac{4a}{\pi}.$$

Druhá část není nic složitějšího nežli pohyb po kružnicovém oblouku. Pivot - bod na kružnici, který se dotýká rohu čtverce - je naproti šedému a kolem něj se otáčí celá kružnice o 90. Šedý bod tak během druhé části opíše čtvrt kružnice s poloměrem $\frac{2a}{\pi}$.

$$\frac{\pi}{2}\frac{2a}{\pi} = a$$

Nakonec se kružnice dovalí do konce, tento pohyb je identicky stejný jako v první části a proto je délka trajektorie stejná. Celkovou dráhu uraženou šedým bodem dostáváme jako

$$2 \cdot \frac{4a}{\pi} + a = \left(\frac{8}{\pi} + 1\right)a$$

□

2.)

Spočtěte integrál

$$\int_{\langle\varphi\rangle} (x+y)\ \mathrm{d}x + (x-y)\ \mathrm{d}y$$

přes elipsu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ orientovanou v kladném směru.

Řešení: Nejprve můžeme zkusit najít potenciál k vektorovému poli $\overrightarrow{F} = (x+y, x-y)$. Hledáme tedy $U(x,y)$, takové, že $\overrightarrow{F}(x,y) = \nabla U(x,y)$. Vyšetřeme nutnou podmínku na $\overrightarrow{F}$ (jeho složky jsou hladké funkce, a proto můžeme prohazovat parciální derivace $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$) a to

$$0 = \operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y) = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 1 - 1 = 0.$$

Jelikož je $\overrightarrow{F}$ všude v $\mathbb{R}^2$ definováno, díky splnění podmínky na rotaci existuje potenciál U. Najděme ho integrováním

$$U(x,y) = \int F_x(x,y)\ \mathrm{d}x = \int x + y\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + xy + C_1(y)$$

$$U(x,y) = \int F_y(x,y)\ \mathrm{d}y = \int x - y\ \mathrm{d}y = xy - \frac{y^2}{2} + C_2(x)$$

Srovnáním obou výsledků dostáváme potenciál ve tvaru

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + D,$$

kde $D \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Vzhledem k tomu, že integrujeme konzervativní vektorové pole přes uzavřenou křivku, musí výsledek být 0.

– –

Alternativní řešení: Pokud si nevšimneme existence potenciálu, lze tento příklad dopočítat také standardně. Zvolme klasickou parametrizaci elipsy

$$\overrightarrow{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Integrál je možné přepsat podle vzorečku pro křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\langle\varphi\rangle} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{\varphi}(t)\right) \cdot \overrightarrow{\varphi}'(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a\cos(t) + b\sin(t) \\ a\cos(t) - b\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} -a^2\sin(t)\cos(t) - ab\sin^2(t) + ab\cos^2(t) - b^2\sin(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

$\square$