Domácí úkol 6

Termín odevzdání: 26. 11. 2025 do večera

1.)

Spočtěte

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Nápověda: Uvažujte funkci $F(a,b) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ a derivujte podle b.

Řešení:

Postupujme podle hintu a definujme funkci F jako

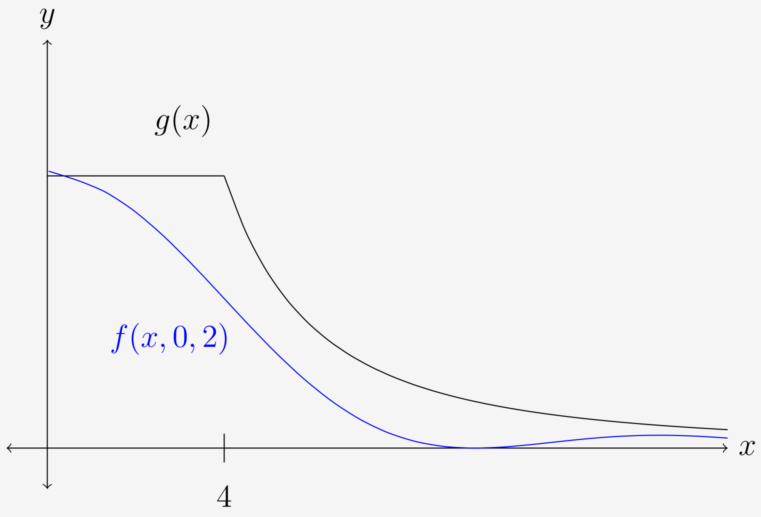
$$F(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nejprve se podíváme na spojitost této funkce. Je zjevné, že integrand je funkce měřitelná v x a spojitá v a i b. Nyní se omezme na parametry a a b pouze z intervalů $a \in [0,\infty)$, $b \in [0,2]$. Důležitým faktem zůstává, že hodnoty $a = 0$ a $b = 1$ jsou v těchto intervalech obsaženy. Omezit parametr b shora potřebujeme protože limita integrandu v 0 je b^2. Jedině tak nyní dokážeme funkci f odhadnout nezávisle na a a b.

$$\left|f(x,a,b)\right| = \left|e^{-ax}\frac{\sin^2(bx)}{x^2}\right| \le g(x), \qquad \forall x \in (0,\infty)\,, \forall a \in [0,\infty), \forall b \in [0,2]$$

kde g definujeme po částech jako

$$g(x) = \begin{cases} 4 & \text{pro } x \in [0,1]\,, \\ \dfrac{4}{x^2} & \text{pro } x \in (1,\infty)\,. \end{cases}$$



Nalezli jsme tedy integrovatelnou majorantu $g(x)$, a po aplikaci věty o spojitosti integrálu závislém na parametru máme, že $F(a,b)$ je spojitá na $[0,\infty)\times[0,2]$ (to minimálně, samozřejmě se to dá dokázat i na větší množině, konkrétně na $[0,\infty)\times\mathbb{R}$). Pro nás důležitá je spojitost vzhledem k a až do 0.

Nyní můžeme začít konečně derivovat. Předpoklady na měřitelnost a spojitost v odpovídajících proměnných už nebudeme kontrolovat, neboť je funkce ve skutečnosti hladká ve všech svých proměnných. První derivace vypadá takto:

$$\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial b}=e^{-ax}\frac{2\sin(bx)\cos(bx)x}{x^2}=e^{-ax}\frac{\sin(2bx)}{x}.$$

Tuto funkci můžeme na intervalu $[A_1,\infty)\times[0,2]$ odhadnout pomocí funkce

$$\left|e^{-ax}\frac{\sin(2bx)}{x}\right|\le 4e^{-A_1x}.$$

Vzhledem k tomu, že určitě existují parametry, pro které náš integrál konverguje, např. $b=0$, pak můžeme aplikovat větu o záměně derivace a integrálu a psát

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial b}=\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin(2bx)}{x}\;\mathrm{d}x.$$

Tento vztah platí na množině $[A_1,\infty)\times[0,2]$, ale jelikož jsme mohli volit A_1 libovolně malé, platí rovnost na celém $(0,\infty)\times[0,2]$.

Jelikož integrál stále neumíme spočítat, pokračujeme druhou derivací

$$\frac{\partial^2 f(x,a,b)}{\partial b^2}=2e^{-ax}\cos(2bx).$$

Tuto funkci umíme odhadnout velmi podobně. Pro nějaké $A_2>0$ určitě platí, že

$$\left|2e^{-ax}\cos(2bx)\right|\le 2e^{-A_2x}.$$

Můžeme tedy na intervalu $[A_2,\infty)\times[0,2]$ psát, že

$$\frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial b^2}=2\int_0^\infty e^{-ax}\cos(2bx)\;\mathrm{d}x.$$

Jelikož jsme opět mohli brát A_2 libovolně malé, platí tento vztah na celém $(0,\infty)\times[0,2]$. Nyní provedeme dvakrát per-partes a dostaneme

$$2\int_0^\infty e^{-ax}\cos(2bx)\;\mathrm{d}x=2\underbrace{\left[e^{-ax}\frac{\sin(2bx)}{2b}\right]_0^\infty}_{=0}+2\int_0^\infty ae^{-ax}\frac{\sin(2bx)}{2b}=$$

$$=\frac{a}{b}\left[-e^{-ax}\frac{\cos(2bx)}{2b}\right]_0^\infty-\frac{a}{b}\int_0^\infty ae^{-ax}\frac{\cos(2bx)}{2b}\;\mathrm{d}x=\frac{a}{2b^2}-\frac{a^2}{2b^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos(2bx)\;\mathrm{d}x.$$

Proto

$$\frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial b^2} = \frac{a}{2b^2} - \frac{a^2}{4b^2}\frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial b^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial b^2} = \frac{2a}{a^2+4b^2}$$

Tento výsledek nyní integrujme vzhledem k b.

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = \int \frac{2a}{a^2+4b^2}\,\mathrm{d}b = \operatorname{arctg}\left(\frac{2b}{a}\right) + C(a)$$
$$F(a,b) = b\operatorname{arctg}\left(\frac{2b}{a}\right) - \frac{a\ln\left(a^2+4b^2\right)}{4} + \tilde{C}(a)$$

Nakonec dopočítáme konstantu $\tilde{C}(a)$, jelikož víme, že $F(a,0) \equiv 0$.

$$0 = F(a,0) = -\frac{a\ln\left(a^2\right)}{4} + \tilde{C}(a)$$
$$\tilde{C}(a) = \frac{a\ln\left(a^2\right)}{4} = \frac{a\ln(a)}{2}$$

Spočítali jsme tedy kompletní vzorec pro funkci

$$F(a,b) = b\operatorname{arctg}\left(\frac{2b}{a}\right) - \frac{a\ln\left(a^2+4b^2\right)}{4} + \frac{a\ln(a)}{2},$$

hodnotu v bodě $(0,1)$ spočteme přes limitu, protože už víme, že F je spojitá na $[0,\infty)\times[0,2]$.

$$F(0,1) = \lim_{a\to 0} F(a,1) = \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{a}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\frac{a\ln\left(a^2+4\right)}{4}}_{=0} + \underbrace{\frac{a\ln(a)}{2}}_{=0} = \frac{\pi}{2}$$

□