Domácí úkol 4

Termín odevzdání: 5. 11. 2025 do večera

1.)

Rozhodněte, zda řada funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n^2}{n+\frac{1}{5}}x\right)}{n^{x^2-3x+3}}$$

konverguje stejnoměrně na $[0, 2\pi]$.

Řešení: Nejprve zkontrolujme zda není možné použít Weierstrassův M-test a srovnat naši řadu s číselnou řadou typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Exponent ve jmenovateli je kvadratický polynom, který je sice vždy kladný (a naše řada tak splňuje nutnou podmínku konvergence), ale již ne všude je větší než 1.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 3 &\leq 1 \\ x^2 - 3x + 2 &\leq 0 \\ (x-1)(x-2) &\leq 0, \end{aligned}$$

tedy problém nastává na intervalu $[1, 2]$. Zde není možné použít Weierstrasse a musíme si poradit jinak.

V čitateli máme člen, který se chová zhruba jako "$\sin(nx)$", zkusíme proto napasovat Dirichleta. Nejprve, ale musíme čitatel upravit do přesně takového tvaru, na to se hodí součtové vzorce.

$$\sin\left(\frac{n^2}{n+\frac{1}{5}}x\right) = \sin\left(\frac{n^2+\frac{n}{5}-\frac{n}{5}}{n+\frac{1}{5}}\right) = \sin\left(nx - \frac{n}{5n+1}x\right) =$$
$$= \sin(nx)\cos\left(\frac{n}{5n+1}x\right) - \cos(nx)\sin\left(\frac{n}{5n+1}x\right)$$

Rozdělme naši řadu na dvě a studujme je zvlášť. Nejprve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{x^2-3x+3}} \cos\left(\frac{n}{5n+1}x\right),$$

o funkcích $\sin(nx)$ víme, že mají stejně stejnoměrně omezené částečné součty na $[\delta, 2\pi - \delta]$ pro libovolné $\delta > 0$. Posloupnost

$$\frac{1}{n^{x^2-3x+3}}$$

jde k nule pro všechna x, nejpomaleji v bodě $x = \frac{3}{2}$, ale i v něm je exponent kladný a roven $\frac{3}{4}$, platí tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \frac{1}{n^{x^2-3x+3}} - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} = 0,$$

a posloupnost tak konverguje k 0 stejnoměrně. Nakonec si všimneme, že posloupnost $\cos\left(\frac{n}{5n+1}x\right)$ je monotónní, platí totiž

$$0 \le \frac{n}{5n+1}x \le \frac{2\pi}{5} < \pi \qquad \forall x \in [0, 2\pi],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

a my můžeme aplikovat arccos jako ekvivalentní úpravu (je to bijekce z $[-1, 1] \to [0, \pi]$, a proto můžeme psát $\arccos\left(\cos\left(\frac{n}{5n+1}x\right)\right) = \frac{n}{5n+1}x$).

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{n}{5n+1}x\right) &\ge \cos\left(\frac{n+1}{5n+6}x\right) \\
\frac{n}{5n+1}x &\le \frac{n+1}{5n+6}x \qquad \text{\textit{Pozn.}: funkce arccos je klesající, proto otáčíme znaménko nerovnosti} \\
5n^2 + 6n &\le 5n^2 + 6n + 1
\end{aligned}$$

Navíc jsou cosiny zjevně stejně stejnoměrně omezené jedničkou. Máme tedy dohromady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\frac{\sin(nx)}{n^{x^2-3x+3}}}_{Dirichlet} \cos\left(\frac{n}{5n+1}x\right)}_{Abel} \rightrightarrows \quad \text{na } [\delta, 2\pi - \delta]$$

Velmi podobně dokážeme, že stejnoměrně konverguje i druhá část původní řady,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{x^2-3x+3}} \sin\left(\frac{n}{5n+1}x\right).$$

Omezené částečné součty $\cos(nx)$ máme, stejnoměrnou konvergenci jmenovatele k 0 taky. Siny jsou také stejně stejnoměrně omezené jedničkou. Jen k monotonii $\sin\left(\frac{n}{5n+1}x\right)$ potřebujeme trochu jinou podmínku, která ale také platí:

$$-\frac{\pi}{2} \le 0 \le \frac{n}{5n+1}x \le \frac{2\pi}{5} \le \frac{\pi}{2}.$$

Platí tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\frac{\cos(nx)}{n^{x^2-3x+3}}}_{Dirichlet} \sin\left(\frac{n}{5n+1}x\right)}_{Abel} \rightrightarrows \quad \text{na } [\delta, 2\pi - \delta]$$

Dohromady máme tedy, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n^2}{n+\frac{1}{5}}x\right)}{n^{x^2-3x+3}} \rightrightarrows \quad \text{na } [\delta, 2\pi - \delta] \tag{$\star$}$$

Spojíme-li teď dohromady naše poznatky s těmi z Weiestrassova M-testu, vidíme, že dokážeme pokrýt celý interval $[0, 2\pi]$. Volme například $\delta = \frac{1}{2}$. Platí

$$\inf_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[2\pi - \frac{1}{2}, 2\pi\right]} x^2 - 3x + 3 = \frac{7}{4}.$$

Můžeme proto odhadnout funkce

$$\frac{1}{n^{x^2-3x+3}} \leq \frac{1}{n^{\frac{7}{4}}},$$

a podle Weierstrasse konverguje řada stejnoměrně na $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ a také na $\left[2\pi - \frac{1}{2}, 2\pi\right]$. Podle $(\star)$ vidíme, že řada také konverguje stejnoměrně na $\left[\frac{1}{2}, 2\pi - \frac{1}{2}\right]$. Jelikož máme 3 (konečný počet) množiny - intervaly -, na kterých konvergujeme stejnoměrně, konvergujeme stejnoměrně také na jejich sjednocení a tedy na celém intervalu $[0, 2\pi]$.

$\square$

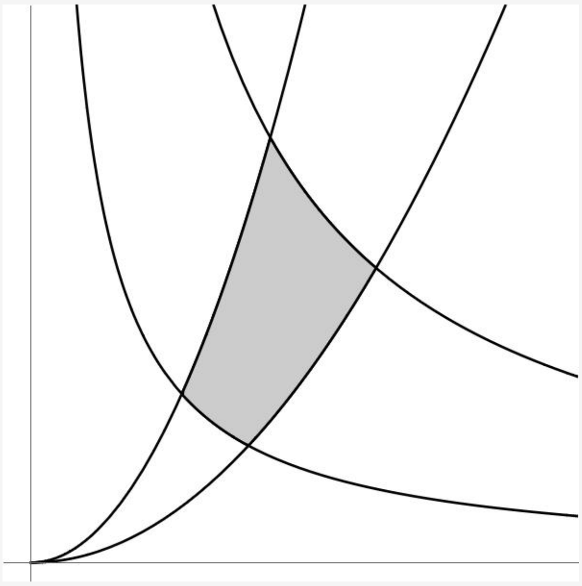
2.)

Vypočtěte hmotnost desky ohraničené křivkami

$$y = x^2, \qquad y = 3x^2, \qquad y = \frac{1}{2x}, \qquad y = \frac{2}{x}$$

s plošnou hustotou $\rho(x, y) = 6xy^2$.

Řešení: Tvar desky není nikterak pěkný, navíc její hustota se mění jak s x-ovou tak s y-ovou souřadnicí.



Provedeme speciální záměnu souřadnic, která bude reflektovat tvar naší množiny. Definujme

$$u = \frac{y}{x^2}$$
$$v = xy,$$

inverzní zobrazení má předpis

$$x = \sqrt[3]{\frac{v}{u}}$$
$$y = \sqrt[3]{uv^2}.$$

Proto tedy platí

$$\varphi(u, v) = \left(\sqrt[3]{\frac{v}{u}}, \ \sqrt[3]{uv^2}\right),$$

kde φ je zobrazení z věty o substituci. Z obrázku je zřejmé že se pohybujeme v kladných x a y, tedy také u a v. Vše je tedy správně definované a $\varphi \in C^1$. Spočtěme Jakobiho matici

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\frac{-\frac{v}{u^2}}{\sqrt[3]{\frac{v}{u}}^2} & \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{u}}{\sqrt[3]{\frac{v}{u}}^2} \\ \frac{1}{3}\frac{v^2}{\sqrt[3]{uv^2}^2} & \frac{1}{3}\frac{2uv}{\sqrt[3]{uv^2}^2} \end{pmatrix}$$

a její determinant

$$\left|\det J_\varphi\right| = \left| -\frac{1}{9}\frac{2\frac{v^2}{u}}{v^2} - \frac{1}{9}\frac{\frac{v^2}{u}}{v^2} \right| = \frac{1}{3u}.$$

Můžeme sestavit integrál, bude dvojný ve tvaru

$$\int_1^3 \int_{\frac{1}{2}}^2 6x(u,v)y^2(u,v)\frac{1}{3u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 2\int_1^3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt[3]{\frac{v}{u}}\sqrt[3]{uv^2}^2 \frac{1}{u}\frac{1}{3u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$
$$= 2\int_1^3 \int_{\frac{1}{2}}^2 u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 2\int_1^3 u^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{3}{8}v^{\frac{8}{3}}\right]_{\frac{1}{2}}^2 \mathrm{d}u = \frac{3}{4}\left(4\sqrt[3]{4} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}}\right)\int_1^3 u^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{3}{4}\left(4\sqrt[3]{4} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}}\right)\left[3u^{\frac{1}{3}}\right]_1^3 = \frac{9}{4}\left(4\sqrt[3]{4} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}}\right)\left(\sqrt[3]{3} - 1\right) \approx 6.16153\ldots$$

$\square$