Domácí úkol 3

Termín odevzdání: 29. 10. 2025 do večera

V úkolu je mnohem důležitější postup nežli konečný výsledek, vše řádně odůvodněte.

1.)

Rozhodněte, zda posloupnost funkcí $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

$$\varphi_n(x) = e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$$

Řešení: Nejprve najdeme bodovou limitu naší posloupnosti funkcí. Stačí zafixovat x a poslat n do nekonečna.

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} = e^{-|x|}$$

Nyní vyšetřeme stejnoměrnou konvergenci. Hledejme

$$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - e^{-|x|} \right|.$$

Správně bychom měli nejdřív zkontrolovat chování pro $x \to \infty$. Jelikož jsou funkce sudé stačí se nám kontrolovat nezáporné x.

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - e^{-|x|} = \lim_{x\to\infty} e^{-|x|} \left(e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{-|x|} \left(-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \right) \left(\frac{e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} - 1}{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \right)$$

Zkontrolujeme chování

$$\lim_{x\to\infty} -\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 - \frac{1}{n} + x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = 0,$$

a proto je nulová i předchozí limita. Hledejme tedy maximum rozdílu oněch dvou funkcí někde na intervalu $[0, \infty)$ (Díky sudosti stačí hledat zde, navíc se tím vyhneme problémům s derivací $|x|$ v 0). Derivujme

$$\left(e^{-x} - e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \right)' = -e^{-x} + e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} < 0,$$

protože druhý člen je v absolutní hodnotě menší nežli první. Rozdíl je tedy vždy klesající a proto nám stačí zkontrolovat maximum v bodě 0.

$$\sigma_n = 1 - e^{-\sqrt{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 0$$

což plyne již také z bodové konvergence v 0. Posloupnost tak konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$.

$\square$

2.)

Vyšetřete, kde řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\dfrac{2+x}{1+x^2}}$$

splňuje nutnou podmínku stejnoměrné konvergence. Nalezněte maximální interval, na kterém řada konverguje lokálně stejnoměrně. Ukažte, že na tomto intervalu řada nekonverguje stejnoměrně.

Hint: V poslední části 2.) se můžete inspirovat postupem z příkladu **14.2.4** ze skript Černý & Pokorný.

Řešení: Nutná podmínka zní: pokud má řada $\sum f_n \rightrightarrows$, pak musí $f_n \rightrightarrows 0$. Sledujme bodovou limitu funkcí

$$n^{-\dfrac{2+x}{1+x^2}}$$

Na to, aby byla limita $n \to \infty$ výrazu rovna 0 potřebujeme, aby byl exponent záporný, neboli

$$\frac{2+x}{1+x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad -2 < x < \infty$$

Na intervalu $(-2, \infty)$ ale nemůžeme k 0 konvergovat stejnoměrně, protože

$$\sup_{x\in(-2,\infty)} \left| n^{-\dfrac{2+x}{1+x^2}} - 0 \right| = \sup_{x\in(-2,\infty)} n^{-\dfrac{2+x}{1+x^2}} \geq \lim_{x\to-2} n^{-\dfrac{2+x}{1+x^2}} = 1,$$

podobně pro $x \to \infty$. Zvolme alespoň ořezaný interval $[-2+\delta, K]$, $\delta > 0, K > 0$. Dokažme, že na tomto intervalu konvergujeme stejnoměrně. Zderivujme funkci a hledejme maximum,

$$\left(n^{-\dfrac{2+x}{1+x^2}} \right)' = \ln(n)\, n^{-\dfrac{2+x}{1+x^2}} \frac{x^2+4x-1}{(1+x^2)^2} = 0,$$

což má na intervalu $(-2, \infty)$ jedno řešení a to bod $x = -2 + \sqrt{5}$. Podle znaménka derivace však můžeme nahlédnout, že jde o minimum, maximum tedy nabýváme na krajích intervalu. Zde podle bodové konvergence na $[-2+\delta, K]$ konvergujme k nule, a proto je nutná podmínka stejnoměrné konvergence splněna na intervalu $[-2+\delta, K]$ pro libovolně malé $\delta > 0$ a libovolně velké $K > 0$.

Nyní se podíváme na stejnoměrnou konvergenci samotné řady. Je jasné, že nemůže konvergovat stejnoměrně na jakémkoli intervalu, kde jsou x, pro které $\frac{2+x}{1+x^2} \leq 1$, neboť pro tyto x řada vůbec nekonverguje. Chceme tedy

$$\frac{2+x}{1+x^2} > 1$$
$$2+x > 1+x^2$$
$$\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0$$

Maximální interval lokální stejnoměrné konvergence je tedy $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Stejnoměrná konvergence na $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \delta_1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta_2\right]$ je totiž zřejmá z Weierstrassova M-testu. Platí

$$\exists \lambda > 0, \forall x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \delta_1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \delta_2\right] : \frac{2+x}{1+x^2} > 1 + \lambda$$

Poté můžeme použít odhad

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{2+x}{1+x^2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}} < \infty$$

Nakonec ukážeme, že na intervalu $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ nekonvergujme stejnoměrně. Vyjděme z Bolzano-Cauchyovy podmínky, která by musela platit:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty),\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} k^{-\frac{2+x}{1+x^2}}\right| < \varepsilon$$

Na chvíli zafixujeme n a p, jelikož poslední nerovnost platí pro všechna x z nalezeného intervalu, můžeme s x limitit k jednomu z jeho krajů. Ze spojitosti se nám při limitním procesu ostrá nerovnost maximálně změní na neostrou. Dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty),\ \forall p \in \mathbb{N}, : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} k^{-1}\right| \leq \varepsilon,$$

což je Bolzano-Cauchyova podmínka pro harmonickou řadu, o které víme, že diverguje a proto přicházíme do sporu. Řada tedy nemůže konvergovat stejnoměrně na $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, pouze lokálně stejnoměrně.

□