Domácí úkol 2

Termín odevzdání: 22. 10. 2025 do večera

1.)

Mějte zadán funkcionál akce

$$S(\mathbf{q}) = \int_0^t L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\ \mathrm{d}t = \int_0^t (\dot{q}_1)^2 - \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1 + q_2^2\dot{q}_1\ \mathrm{d}t.$$

Najděte první Gâteauxovu derivaci ve směru $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$. Dále zaveďte zobecněné hybnosti a sestavte Hamiltonovy rovnice pro nalezení extrémály.

Řešení:

První Gâteauxovu derivaci najdeme z definice (použijeme parametr r, aby nedošlo k záměně s časem t) jako

$$D_{\mathbf{h}}S(q_1, q_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(S(q_1 + rh_1, q_2 + rh_2)\right)\Big|_{r=0} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^t \left(\dot{q}_1 + r\dot{h}_1\right)^2 - \left(\dot{q}_1 + r\dot{h}_1\right)\left(\dot{q}_2 + r\dot{h}_2\right) + (q_1 + rh_1) + (q_2 + rh_2)^2\left(\dot{q}_1 + r\dot{h}_1\right)\ \mathrm{d}t\Big|_{r=0} =$$
$$= \int_0^t 2\left(\dot{q}_1 + r\dot{h}_1\right)\dot{h}_1 - \dot{h}_1\left(\dot{q}_2 + r\dot{h}_2\right) - \left(\dot{q}_1 + r\dot{h}_1\right)\dot{h}_2 + h_1 + 2\,(q_2 + rh_2)\,h_2\left(\dot{q}_1 + r\dot{h}_1\right) +$$
$$+ (q_2 + rh_2)^2\,\dot{h}_1\ \mathrm{d}t\Big|_{r=0} =$$
$$= \int_0^t 2\dot{q}_1\dot{h}_1 - \dot{q}_2\dot{h}_1 - \dot{q}_1\dot{h}_2 + h_1 + 2q_2\dot{q}_1h_2 + q_2^2\dot{h}_1\ \mathrm{d}t.$$

Dál zavedeme zobecněné hybnosti

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 - \dot{q}_2 + q_2^2$$
$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1.$$

Nyní jsme skoro připraveni zkonstruovat Hamiltonián, ještě potřebujeme najít předpis pro $\dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Invertujeme předchozí rovnice do tvaru

$$\dot{q}_1 = -p_2 \tag{1}$$
$$\dot{q}_2 = q_2^2 - p_1 - 2p_2. \tag{2}$$

Hamiltonián tedy dostáváme podle vzorce

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p_1\dot{q}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + p_2\dot{q}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\right) =$$
$$= -p_1p_2 + p_2\left(q_2^2 - p_1 - 2p_2\right) - p_2^2 - p_2\left(q_2^2 - p_1 - 2p_2\right) - q_1 + q_2^2p_2 =$$
$$= q_2^2p_2 - p_1p_2 - p_2^2 - q_1.$$

Dvě Hamiltonovy rovnice už známe, jsou to vztahy (1) a (2). Zbývající dvě rovnice získáme podle

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 1 \tag{3}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -2q_2p_2. \tag{4}$$

$\square$

2.)

Definujme posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx).$$

Nalezněte bodovou limitu (pokud existuje) na intervalu $(0, \infty)$. Rozhodněte, zda tato posloupnost konverguje ke své limitě na tomto intervalu stejnoměrně či alespoň lokálně stejnoměrně.

Řešení: Bodovou limitu najdeme snadno. Je zjevné, že pro pevně dané x platí, že $nx \to \infty$ pro $n \to \infty$. Proto má bodová limita (platí $f_n \to f$) podobu

$$f(x) = \operatorname{arctg}(+\infty) \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Nyní vyšetřeme stejnoměrnou konvergenci. Definujme

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,\infty)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup_{x\in(0,\infty)} \left|\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}\right| = \sup_{x\in(0,\infty)} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(nx)\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \inf_{x\in(0,\infty)} \operatorname{arctg}(nx) = \frac{\pi}{2}.$$

Z toho hned vidíme, že posloupnost nekonverguje stejnoměrně. Problémem je chování u nuly, jelikož všechny funkce f_n tam mají limitu 0. Pro určení lokálně stejnoměrné konvergence uvažujme libovolnou kompaktní množinu $K \subset (0, \infty)$. Jelikož jsme na reálné ose, víme že K je omezená a uzavřená, má proto svůj minimální prvek, označme ho $m_K > 0$. Díky tomu, že funkce arctg je rostoucí, platí

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2} - \inf_{x\in K} \operatorname{arctg}(nx) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(nm_K) \underbrace{\longrightarrow}_{\text{z bodové konvergence}} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Vidíme, že $f_n \rightrightarrows f$ na množině K. A jelikož K byla libovolná kompaktní podmnožina $(0, \infty)$, konverguje posloupnost $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$.

□

3.)

U každého z následujících tvrzení rozhodněte, zda platí a uveďte příklad posloupnosti funkcí, které ho splňují.

Existuje posloupnost funkcí $\{a_n\}$ taková, že

a) $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $\mathbb{R}$, ale neplatí $a_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

b) $\{a_n\} \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, $a_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$ ale

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{N}) \int_{-\infty}^{\infty} a_n \, \mathrm{d}x > 0.$$

c) $\{a_n\}$ je nerostoucí, platí $a_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, ale neplatí $a_n \rightrightarrows 0$.

d) $\{a_n\}$ je klesající a platí $a_n \rightrightarrows \operatorname{sgn}(x)$.

e) a_n jsou spojité, neplatí, že $a_n \to 0$ na $(0,1)$, ale

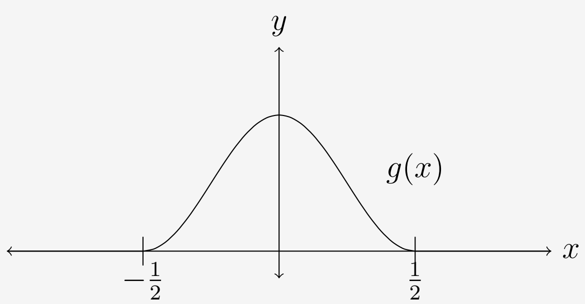
$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{N}) \int_{0}^{1} a_n \, \mathrm{d}x = 0$$

Řešení: Ve skutečnosti si ověříme, že příklad posloupnosti existuje pro všechny z uvedených příkladů.

a)

Pokud pracujeme na $\mathbb{R}$, můžeme využít jeho neomezenosti a naopak omezenosti libovolné kompaktní množiny $K \subset \mathbb{R}$. Z konstruujeme funkce ve stylu tzv. klouzajícího hrbu. Definujme

$$g(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x) & \text{pro } x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$



Poté už jen definujeme posloupnost $\{a_n\}$ jako

$$a_n(x) = g(x - n)$$

a problémový hrbol postupně dříve či později opustí libovolnou kompaktní množinu. Funkce a_n pak na dané množině budou už jen konstantně nulové a zjevně tam tak budou konvergovat stejnoměrně k 0. Zároveň však vidíme, že na $\mathbb{R}$ hrb zůstává a má konstantní výšku, udržuje tak supremum na hodnotě 1 a funkce nekonvergují stejnoměrně.

Pozn.: Jelikož nebyl požadavek na spojitost funkcí a_n, mohli jsme také uvažovat jednoduše $g(x) = \chi_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$, kde χ_I je tzv. charakteristická funkce rovna 1 na svém intervalu I a nulová jinde.

b)

I když máme větu na prohazování limity a integrálu při stejnoměrné konvergenci, zde se pohybujeme na neomezeném intervalu a to není v souladu s jejími předpoklady. Ty vyžadují omezený interval. Lehce nahlédneme, že například funkce

$$a_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(-n,n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pro } x \in (-n, n)\,, \\ \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

zjevně $a_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$, jelikož jejich suprema jsou $\frac{1}{n} \to 0$. Ovšem platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-n}^{n} \frac{1}{n}\ \mathrm{d}x = 2,$$

takže také limita integrálů zůstane na hodnotě $2 > 0$.

c)

Příklad opět vyřešíme velmi jednoduše. Definujme funkci "schod"jako

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0)\,, \\ 0 & \text{pro } x \in (0, \infty)\,, \end{cases}$$

tu pak budeme posouvat směrem vlevo, abychom zachovali, že posloupnost má být nerostoucí. (Zde máme náhodou dokonce i nerostoucí funkce, ty ale k nerostoucí posloupnosti funkcí potřeba)

$$a_n(x) = s(x + n)$$

Pokud bychom funkce "zhladili"(zaoblili rohy, zbavili se nespojitosti), případ by připomínal Diniho větu. K té však opět potřebujeme omezený a tentokrát i uzavřený interval.

d)

Tento případ je velmi jednoduchý, stačí, když na funkci signum prostě "sneseme"seshora.

$$a_n(x) = \operatorname{sgn}(x) + \frac{1}{n}$$

e)

Zde se pokusíme najít posloupnost funkcí, které budou mít konstantní nulový integrál. Zároveň ale chceme, aby funkce nekonvergovaly bodově k nule. Uvažme funkce

$$a_n(x) = \sin(2\pi n x).$$

Platí

$$\int_0^1 a_n(x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi n}\left[\cos(2\pi n x)\right]_0^1 = -\frac{\cos(2\pi n) - \cos 0}{2\pi n} = -\frac{1-1}{2\pi n} = 0.$$

Zároveň je ale zjevné, že pro obecné x posloupnost $\{\sin(2\pi n x)\}$ nemá limitu, a posloupnost funkcí $\{a_n\}$ tak nekonverguje bodově na $(0,1)$.

Pozn.: Úlohu jsem zadával s trochu jiným úmyslem, můžete jako bonus za nějaké desetinky bodu do řešení příštího úkolu přidat posloupnost funkcí a_n, které budou nezáporné, a za ještě větší bonus, funkce nezáporné a limita číselné posloupnosti $a_n(x)$ neexistuje pro žádné $x \in (0,1)$.

□