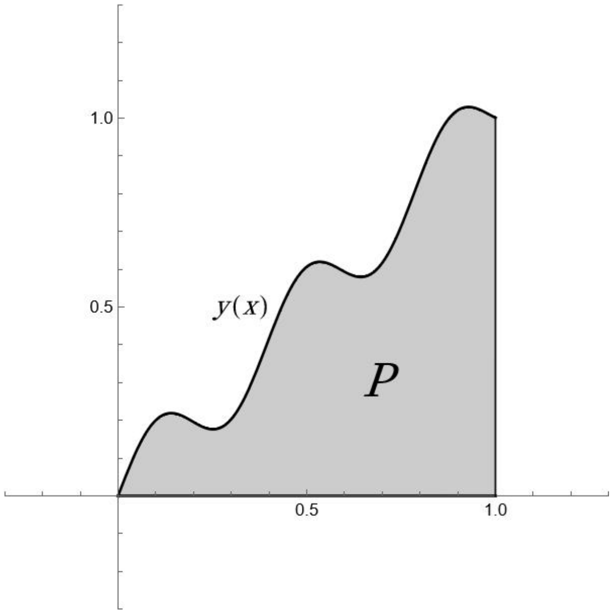
Domácí úkol 1

Termín odevzdání: 15. 10. 2025 do večera

1.)

Uvažujme nezáporné funkce $y \in C([0,1]), y(0) = 0, y(1) = 1$, které svým grafem ohraničí plochu P.



Obrázek 1: Plocha

Najděte takovou funkci y, pro kterou bude součet obsahu a obvodu P co nejmenší.

Řešení: Na úvod trochu technikálií. I když po nás zadání chce minimum na prostoru pouze spojitých funkcí, aby byla úloha vůbec definována musíme mít alespoň částečnou regularitu - například po částech C^1 funkce. Pouze pro takové funkce jsme schopni rozumně vypočítat délku grafu. Funkce jako např. *Weierstrassova* funkce sice je spojitá, ale nikde diferencovatelná, její délka grafu je nekonečná - takové funkce ale opravdu nemusíme uvažovat, protože s nekonečným obvodem určitě nebudou minimizéry v naší úloze. Pokračujme proto, jako bychom pracovali na $C^1([0,1])$.

Nejprve sestavme funkcionál, který chceme minimalizovat. Je to součet obvodu a obsahu šedé plochy P. Obvod se skládá z dvou úseček délky 1. Ty jsou jeho součástí vždy a není třeba je započítávat do minimalizované veličiny. Stačí tedy pouze délka grafu $y(x)$. Obsah plochy pod grafem je pro nezáporné funkce rovna prostě jen integrálu z dané funkce. Zde je důležitý předpoklad nezápornosti, nyní si s tím ale nelámeme hlavu a funkcionál zadáváme bez vazby na nezáporné funkce - pouze pokud by nám minimizující funkce vyšla částečně záporně, musíme výpočet předělat.

$$\Phi(y) = \int_0^1 y + \sqrt{1+(y')^2}\ \mathrm{d}x$$

Spočítejme Euler-Lagrangeovy rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)' \\ 1 &= \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)'. \end{aligned}$$

Tato rovnice je ekvivalentní s

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = x + C. \tag{1}$$

Zde jsme mohli rovnou integrovat aniž bychom závorku rozderivovávali, obejdeme se tedy bez y'', nemusíme diskutovat, zda existuje (Věta o regularitě minimizéru). Pro klid v duši a pro kontrolu však diskuzi udělat můžeme.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}^3} > 0$$

a proto náš minimizér bude dokonce lokálně C^2 (kromě bodů, kde je nekonečná derivace, které na prostoru spojitých funkcí povolujeme). Pokračujme a řešme rovnici (1).

$$\begin{aligned} \frac{(y')^2}{1+(y')^2} &= (x+C)^2 \\ y' &= \frac{x+C}{\sqrt{1-(x+C)^2}} \end{aligned}$$

Při odmocňonení jsme zapomněli na větev se znaménkem $-$, protože již z rovnice (1) je zřejmé, že y' sdílí znaménko s $x + C$. Dále integrujme

$$\begin{aligned} y = \int \frac{x+C}{\sqrt{1-(x+C)^2}}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = (x+C)^2 \\ \mathrm{d}t = 2(x+C)\ \mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t}}\ \mathrm{d}t = \\ = -\sqrt{1-t} + D = -\sqrt{1-(x+C)^2} + D \end{aligned}$$

Dosazením okrajových podmínek $y(0) = 0$ a $y(1) = 1$ získáme rovnice pro konstanty C a D, jejich vyřešením pak dostáváme jediného kandidáta na extrém

$$y = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$

Tato funkce není sice z prostoru $C^1([0,1])$, ale je mu libovolně blízko. A na prostoru $C([0,1])$ u6 je to validní funkce.

Nyní ještě ověříme, že jde skutečně o minimum, dokonce globální. Zkusíme rozhodnout o konvexitě funkcionálu Φ. Spočítejme Hessovu matici pro funkci f (její část závislou na posledních dvou složkách, $\tilde{f}(y,y')$), díky pouhé lineární závislosti na y platí

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial (y')} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial (y') \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}^3} \end{pmatrix},$$

což je jistě všude pozitivně semidefinitní matice. Funkcionál je tedy konvexní na celém prostoru $C^1([0,1])$. Tomu šlo nahlédnout přímo, pokud si uvědomíme, že $f(x,y,y') = y + \sqrt{1+(y')^2}$ je součet dvou konvexních funkcí "jedné proměnné"($k_1(x) = x$ a $k_2(x) = \sqrt{1+x^2}$).

□

2.)

Nalezněte extrémály funkcionálu Φ na množině M vzhledem k vazbě $G = 3$ (příklad 15 z 1. sady).

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_0^1 (y')^2 \, \mathrm{d}x \\ M &= \left\{ y \in C^1([0,1]); y(0) = 1, y(1) = 6 \right\} \\ G(y) &= \int_0^1 y \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Řešení: Začneme s nutnou podmínkou při práci s Lagrangeovými multiplikátory:

$$\mathrm{d}\, G(y) \neq 0.$$

Ta je ale splněna velmi snadno, jelikož

$$D_h G(y) = \int_0^1 h \, \mathrm{d}x,$$

což zjevně není identická nula. Definujme proto funkcionál $B = \Phi - \lambda G$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ a hledejme minimum. Euler-Lagrangeovy rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial y} &= \left(\frac{\partial b}{\partial y'} \right)' \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y'} \right)' \\ -\lambda &= \left(2y' \right)'. \end{aligned}$$

Zde by se nám hodilo mít zajištěnou regularitu minimizéru. Ověřme, že

$$\frac{\partial^2 b}{\partial (y')^2} = 2 > 0,$$

takže minimizér bude z $C^2([0,1])$. Vyřešme nyní diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{\lambda}{2} \\ y &= -\frac{\lambda}{4} x^2 + Cx + D \end{aligned}$$

a konstanty dopočítejme z okrajových podmínek a vazební podmínky.

$$\begin{aligned} y(0) = 1 \qquad &\Rightarrow \qquad D = 1 \\ y(1) = 6 \qquad &\Rightarrow \qquad -\frac{\lambda}{4} + C + D = 6 \\ G(y) = 3 \qquad &\Rightarrow \qquad -\frac{\lambda}{12} + \frac{C}{2} + D = 3 \end{aligned}$$

Tuto soustavu řeší trojice $C = 2, D = 1, \lambda = -12$, hledaný kandidát je funkce

$$y(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

Ověřme nyní, že jde o minimum. Podívejme se opět na konvexitu funkcionálu B, respektive funkce $\tilde{b}_x(y, y')$. Hessova matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a je tedy pozitivně semidefinitní. Nalezená funkce je tedy bodem minima funkcionálu $\Phi - \lambda G$, a tedy i bodem minima funkcionálu Φ vzhledem k vazbě $G = 3$.

$\square$