Domácí úkol 10

Termín odevzdání: 10. 1. 2026 do večera

1.)

Spočtěte integrál

$$\int_\Gamma \left(299x^{987} + y\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 + e^{e^y}\right) \mathrm{d}y,$$

kde Γ je kladně orientovaná hranice elipsy se středem v počátku a poloosami o délkách A a B.

Hint: Můžete použít Greenovu větu.

Řešení: Podle instrukcí použijeme Greenovu větu pro plochu $S \subset R^2$ ohraničenou hladkou křivkou ∂S

$$= \int_{\partial S} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_S \mathrm{rot}(\overrightarrow{F})\ \mathrm{d}S.$$

Výpočet se velmi zjednoduší, když si uvědomíme, jak vypadá $\mathrm{rot}(\overrightarrow{F})$ v našem případě.

$$\mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + e^{e^y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(299x^{987} + y\right) = 2x - 1$$

Integrál jsme tedy schopni přepsat do tvaru

$$\int_S 2x - 1\ \mathrm{d}S,$$

kde S je právě zadaná elipsa. Jelikož má elipsa střed v počátku, je tedy symetrická podle osy y a integrál z $2x$ je proto nulový (lichá funkce). Počítáme proto pouze záporně vzatý obsah této elipsy a ten je roven

$$\int_S -1\ \mathrm{d}S = -\pi AB$$

□

2.)

Uvažujme vektorové pole

$$\overrightarrow{\mathcal{G}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^3y + 8\cos(z) \\ -3x^2y^2 + ze^y \\ z^4 + x\sin(y) \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte vnější tok tohoto pole přes povrch kvádru s protějšími vrcholy $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$.

Řešení: Podobně jako v předchozí úloze se práce zjednoduší použitím vhodné věty, v tomto případě použijeme větu Gaussovu pro $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{\mathcal{G}} \, \mathrm{d}x.$$

Spočtěme tedy divergenci $\overrightarrow{\mathcal{G}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overrightarrow{\mathcal{G}} &= \frac{\partial}{\partial x}\big(2x^3y + 8\cos(z)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(-3x^2y^2 + ze^y\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(z^4 + x\sin(y)\big) = \\ &= 6x^2y - 6x^2y + ze^y + 4z^3 = ze^y + 4z^3. \end{aligned}$$

Kvádr je velmi jednoduchá množina na parametrizaci, vystačíme s obyčejnými kartézskými souřadnicemi. Počítejme tedy

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 ze^y + 4z^3 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{9}{2}e^y + 81 \, \mathrm{d}y = \frac{9}{2}(e^2 - 1) + 162$$

□